



# Erarbeitung eines Leitungsmodells zur Berechnung der Leitungsparameter unter Berücksichtigung der endlichen Leitungslänge und Mastausbreitungswiderstände an den Erdungspunkten

Thanh Binh Nguyen · Carlo Liebermann · Peter Schegner

Eingegangen: 4. Juni 2024 / Angenommen: 17. Juni 2024  
 © The Author(s) 2024

**Zusammenfassung** Bei Freileitungen wird der Einfluss von Erdseilen häufig unter der Annahme einer ideal leitenden Verbindung zur Modellerde im Leitungsmodell berücksichtigt. Darüber hinaus werden zur Berechnung der induktiven Verkopplung konventionell unendlich lange Leiter Erde-Schleifen betrachtet. Der Ansatz geht dabei von einem in Leitungsrichtung homogenen Feldbild aus. Abweichungen von diesem Ansatz treten zum Beispiel am Leitungsanfang und -ende sowie in der Nähe von Verdrillungsmasten auf, da in diesen Bereichen kein homogenes Feld zu erwarten ist. Ebenfalls können Erdseile und Lichtwellenleiter-Erdseile nicht als unendlich lang angenommen werden, da durch die spannungsfeldweise Erdung Ausgleichsströme in jedem Spannfeld auftreten, sodass auch hier der Ansatz eines homogenen Feldbildes nicht erfüllt ist. Mit dem Hertz'schen Dipolansatz wird ein komplexer Integralausdruck zur Berechnung der Impedanz von Leitern beliebiger Länge erarbeitet. Dieser lässt sich bei endlicher Leiterlänge nicht in einer geschlossenen Form darstellen, weshalb numerische Methoden zum Einsatz kommen. Um den numerischen Rechenaufwand zu reduzieren, wird der Integralausdruck mithilfe der Image-Theorie approximiert, was die Berechnung für praxisnahe Anordnungen ermöglicht. Mit den Ergebnissen wird ein Leitungsmodell aufgebaut und in MATLAB implementiert, welches es möglich macht, die Leitungsparameter und speziell die Nullimpedanz unter Berücksichtigung verschiedener Einflussparameter zu berechnen. Das Modell wurde sowohl mit einer fiktiven als auch

mit einer realen Leitung validiert. Anhand des entwickelten Modells werden Parameterstudien durchgeführt, um signifikante Einflussfaktoren auf die Nullimpedanz zu identifizieren.

**Schlüsselwörter** Leitungsmodell · Leitungsparameter · Erdseil · Seilstrom · Maststrom · Nullimpedanz

**Development of a transmission line model for calculating line parameters considering finite line length and tower propagation resistances at grounding points**

**Abstract** In overhead power line analysis, the influence of ground wires is often considered assuming an ideally conducting connection to the model earth. Additionally, for calculating the inductive coupling, conventionally infinitely long conductor-earth loops are examined, assuming a homogenous field along the conductor direction. Deviations from this approach occur, for example, at the beginning and end of the line as well as near transposition towers where a homogenous field can not be expected. Moreover, ground wires and optical ground wires can also not be assumed to be infinitely long as equalizing currents occur in each span due to the span-by-span earthing so that the approach of a homogeneous field is not fulfilled here either. Utilizing the Hertzian dipole approach, a complex integral expression for calculating the impedance of conductors of arbitrary length is derived. Since this expression cannot be represented in closed form for finite conductor lengths, numerical methods are employed. To reduce computational complexity, the integral expression is approximated using image theory, facilitating computations for practical uses. Subsequently, a MATLAB-based model is developed and validated with both

T. B. Nguyen (✉) · C. Liebermann · P. Schegner  
 Institut für Elektrische Energieversorgung und  
 Hochspannungstechnik (IEEH), Professur  
 für Elektroenergieversorgung, TU Dresden,  
 Mommsenstraße 10, 01069 Dresden, Deutschland  
[thanh\\_binh.nguyen@tu-dresden.de](mailto:thanh_binh.nguyen@tu-dresden.de)

a fictitious and a real transmission line, enabling the calculation of line parameters, particularly the zero-sequence impedance, while considering various influencing factors. The developed model is utilized for parameter studies to identify significant factors affecting the zero-sequence impedance.

**Keywords** Overhead line model · Line parameter · Ground wire · Line current · Tower current · Zero-sequence impedance

## 1 Einleitung

### 1.1 Motivation

Die voranschreitende Energiewende und die notwendige Integration erneuerbarer Energien erfordern allgemein einen Ausbau des Übertragungsnetzes, was zu komplexen Leitungsstrukturen führt. Die Berechnung der Leitungsparameter zur Modellierung der Freileitungen ist ein wichtiger Schritt bei der Projektierung, um Kenntnisse über das Übertragungsverhalten zu erlangen und den sicheren Betrieb zu gewährleisten.

Zur Berechnung der Leitungsparameter ist ein präzises Leitungsmodell entscheidend, welches vom gewählten Ersatzschaltbild und Berechnungsansatz abhängt. Ein genaues Modell ermöglicht es, die elektrischen Eigenschaften der Freileitungen zu simulieren, was für die Analyse und Optimierung des Netzbetriebs unerlässlich ist.

### 1.2 Problemstellung und Stand der Technik

Bei der Berechnung der Leitungsparameter wird üblicherweise davon ausgegangen, dass die Erdverbindung an jedem Mast vernachlässigt wird (siehe Abb. 1). Darüber hinaus werden die Erdseile als unendlich lang angesehen, obwohl sie aufgrund der

spannfeldweise Erdung eine endliche Länge haben. Diese Annahme erleichtert die Modellierung und die Verwendung der Ergebnisse von Carson [1] und Pollaczek [2] zur Berechnung der Selbst- und Koppelimpedanz der Freileitungsseile.

Um die Freileitung realitätsnah zu modellieren, wird ein Freileitungsmodell benötigt, welches die Widerstände zwischen Erdseilen sowie Lichtwellenleiter-Erdseilen (LWL-Seilen) und dem Erdreich sowie die endliche Länge der Erd-/LWL-Seile mit berücksichtigt (siehe Abb. 2).

### 1.3 Struktur der Arbeit

Kap. 2 beinhaltet die Grundlagen der Impedanzberechnung unter Berücksichtigung der Leitungslänge nach dem Hertz'schen Dipolansatz. Es werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie der Rechenaufwand bei Verwendung der gewonnenen Formeln zur Impedanzberechnung verringert werden kann. Kap. 3 beschreibt den Aufbau des Leitungsmodells zur Anwendung der Ergebnisse aus Kap. 2. Dabei wird detailliert erläutert, wie die theoretischen Grundlagen in ein praktisches Modell umgesetzt werden. Darauf aufbauend behandelt Kap. 4 die Validierung des Freileitungsmodells. Hier werden die theoretischen Ergebnisse mit Messdaten verglichen, um die Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Modells zu überprüfen. Abschließend wird das Modell in Kap. 5 für eine Parameterstudie genutzt, um verschiedene Einflussfaktoren auf die Nullimpedanz zu identifizieren.

## 2 Impedanzberechnung bei Freileitung

Um Verkopplungen zwischen den Leitern unter Berücksichtigung der Leiterlänge zu bestimmen, kann der Hertz'sche Dipolansatz verwendet werden [3–5].

**Abb. 1** Konventionelle Modellierung der Freileitung (Beispiel für Einfachleitung mit einem Erdseil)

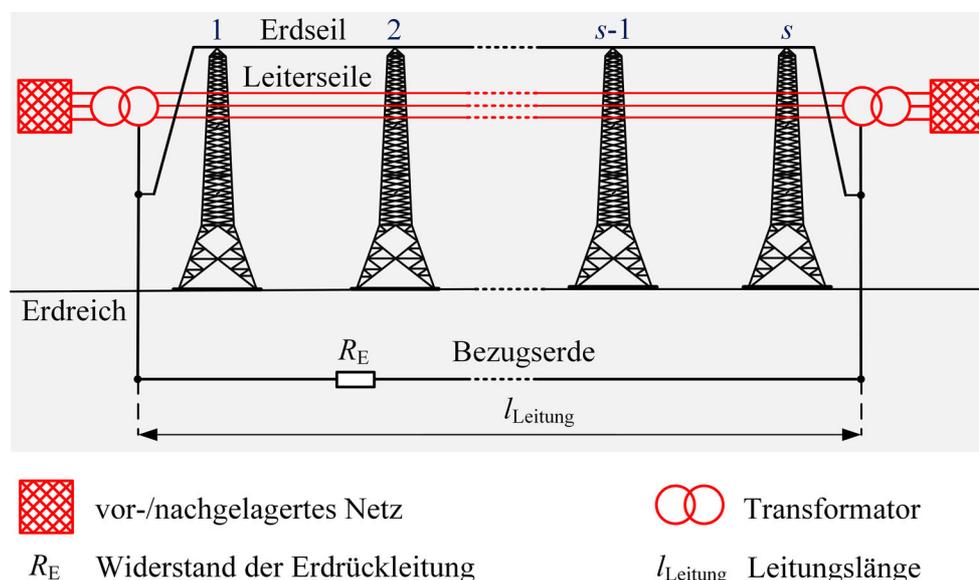
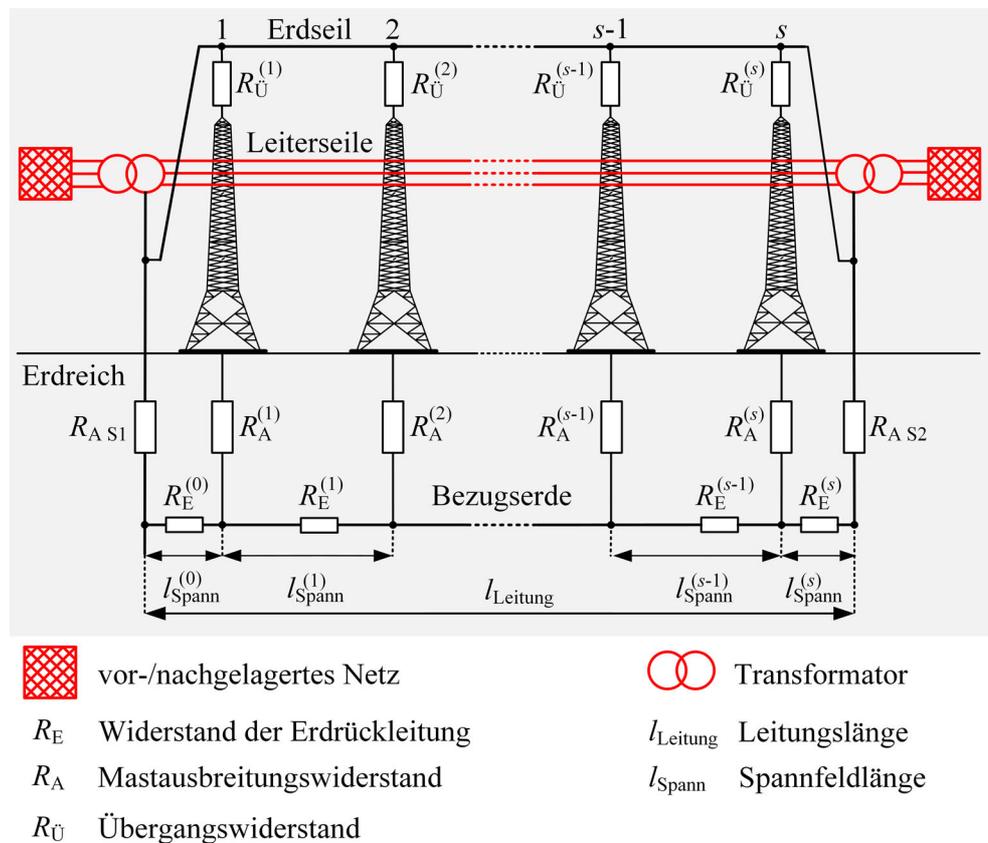


Abb. 2 Realistische Modellierung der Freileitung (Beispiel für Einfachleitung mit einem Erdseil)



Die Entwicklungs- und Herleitungsschritte werden im Folgenden vorgestellt.

### 2.1 Allgemeiner Berechnungsansatz

Betrachtet wird ein infinitesimales Stromelement (Dipol) der Länge  $ds_0$ , das sich in der Höhe  $z_e$  mit den kartesischen Koordinaten  $(x_e, y_e, z_e)$  befindet (siehe Abb. 3). Durch dieses fließt ein Wechselstrom mit komplexer Amplitude  $\underline{I}$  und Kreisfrequenz  $\omega$ . Es wird angenommen, dass der Boden homogen ist und einen spezifischen Erdwiderstand  $\rho_E$  aufweist. Der Hertz'sche Vektor  $\underline{\pi}$  eines Hertz'schen Dipols erfüllt die Wellengleichung in kartesischen Koordinaten.

$$\Delta \underline{\pi} - \underline{\gamma}^2 \underline{\pi} = 0 \tag{1}$$

Sowie in Zylinderkoordinaten mit  $\rho = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$  und  $\varphi = \arctan(y_e/x_e)$  [3]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \underline{\pi}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{\pi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{\pi}}{\partial z^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{\pi} = 0 \tag{2}$$

Dabei ist  $\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\kappa\mu - \omega^2\mu\epsilon}$  die komplexe Ausbreitungskonstante für ebene elektromagnetische Wellen.  $\kappa, \mu,$  und  $\epsilon$  sind die Leitfähigkeit, Permeabilität bzw. Permittivität des entsprechenden Mediums. Die elek-

trische Feldstärke  $\underline{E}$  lässt sich durch den Hertz'schen Vektor  $\underline{\pi}$  ausdrücken:

$$\underline{E} = -\underline{\gamma}^2 \underline{\pi} + \text{grad div } \underline{\pi} \tag{3}$$

Die Herleitung der Feldkomponenten des Hertz'schen Vektors (in x-, y- und z-Richtung) in Luft und Erde (jeweils mit den Indizes 1 und 2) kann aus [4, 5] entnommen werden. Die Komponenten der elektrischen Feldstärke eines Dipols können anschließend nach (3) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{1x} = & -\underline{\gamma}_1^2 \int_0^\infty (M_{1x} e^{\alpha_1 z} + N_{1x} e^{-\alpha_1 z}) \cdot J_0(\rho v) dv \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty (M_{1x} e^{\alpha_1 z} + N_{1x} e^{-\alpha_1 z} + \frac{\alpha_1}{v} N_{1z} e^{-\alpha_1 z}) \\ & \cdot J_0(\rho v) dv \end{aligned} \tag{4}$$

$$\underline{E}_{1y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_0^\infty (M_{1x} e^{\alpha_1 z} + N_{1x} e^{-\alpha_1 z} + \frac{\alpha_1}{v} N_{1z} e^{-\alpha_1 z}) \cdot J_0(\rho v) dv \tag{5}$$

Dabei sind  $\alpha_1 = \sqrt{v^2 + \underline{\gamma}_1^2}$  und  $\alpha_2 = \sqrt{v^2 + \underline{\gamma}_2^2}$ . Hierbei steht  $J_0$  für die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung mit dem Argument  $v$ .  $M_{1x}, N_{1x}$  und  $N_{1z}$  sind Koeffizienten, die den x- und z Komponenten in der Luft entsprechen. Die Bestimmung dieser Größen findet sich in [5].

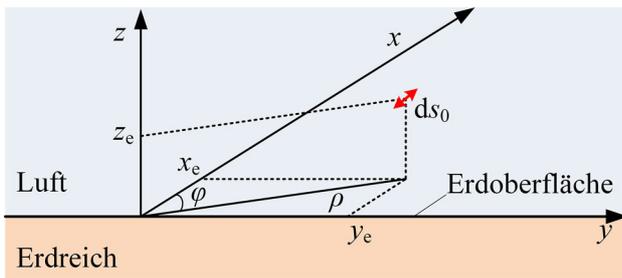


Abb. 3 Horizontaler Dipol in x-Richtung

### 2.2 Bestimmung der äußeren Impedanz

Der feldemittierende Leiter wird durch die Aneinanderreihung von infinitesimalen Dipolen nach Abschn. 2.1 nachgebildet. Abb. 4 stellt den feldemittierenden Leiter (von  $x_{e1}$  bis  $x_{e2}$ ) und den beeinflussten Leiter (von  $x_{b1}$  bis  $x_{b2}$ ) dar. Die Leiter werden als Linien angenommen und befinden sich über der Erdoberfläche in Höhe  $z_e$  bzw.  $z_b$ . Der Abstand zwischen den beiden Leitern beträgt  $a = |y_e - y_b|$ .

Mit den in Gln. 4 und 5 angegebenen elektrischen Feldkomponenten lässt sich die Koppelimpedanz  $\underline{Z}_{\text{Koppel}}$  zwischen zwei Leitern durch einen Integralausdruck bestimmen, wobei das Induktionsgesetz berücksichtigt und das Stoke'sche Gesetz angewendet wird [4, 5]:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{Koppel}} = & \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{x_{b1}}^{x_{b2}} \int_{x_{e1}}^{x_{e2}} \int_0^\infty \left[ \frac{v}{\underline{\alpha}_1} \cdot e^{-\underline{\alpha}_1(z_e - z_b)} \mathbf{J}_0(\rho v) dv \right. \\ & + \frac{v}{\underline{\alpha}_1} \cdot \frac{\underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2}{\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2} \\ & \left. \cdot e^{-\underline{\alpha}_1(z_e + z_b)} \mathbf{J}_0(\rho v) dv \right] dx_e dx_b. \end{aligned} \quad (6)$$

#### 2.2.1 Leiter unendlicher Länge

Für den speziellen Fall, dass beide Leiter unendlich lang (Symbol  $\infty$ ) und parallel auf der Erdoberfläche verlegt sind, liefert (6) eine geschlossene Lösung für den Koppelimpedanzbelag  $\underline{Z}'_{\text{Koppel}}_\infty$  zwischen zwei in Abstand  $a$  befindlichen parallelen Leitern [3, 6]:

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{\text{Koppel}}_\infty = & \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{a^2 + (z_e + z_b)^2}}{\sqrt{a^2 + (z_e - z_b)^2}} - \frac{2}{\underline{\gamma}_2} \cdot \frac{(z_e + z_b)^2 - a^2}{[(z_e + z_b)^2 + a^2]} \right. \\ & + \frac{\pi}{2\underline{\gamma}_2(z_e + z_b - ja)} \left[ \mathbf{H}_1(\underline{\gamma}_2(z_e + z_b - ja)) \right. \\ & \left. - \mathbf{Y}_1(\underline{\gamma}_2(z_e + z_b - ja)) \right] \\ & + \frac{\pi}{2\underline{\gamma}_2(z_e + z_b + ja)} \left[ \mathbf{H}_1(\underline{\gamma}_2(z_e + z_b + ja)) \right. \\ & \left. - \mathbf{Y}_1(\underline{\gamma}_2(z_e + z_b + ja)) \right] \Big]. \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei sind  $\mathbf{H}_1$  und  $\mathbf{Y}_1$  die Struve'sche bzw. Neumann'sche Funktion erster Ordnung mit einem komplexen Argument. Der Ausdruck in (7) gibt eine präzise Beschreibung der Koppelimpedanz zwischen den Leitern unendlicher Länge über der Erdoberfläche, wobei sowohl die geomagnetischen Effekte als auch die Fre-

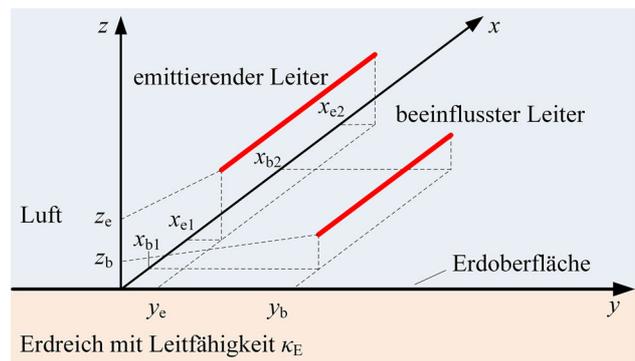


Abb. 4 Leitermodell zur Berechnung der Impedanz zwischen zwei über der Erdoberfläche verlegten Leitern endlicher Länge mit gemeinsamer Erdrückleitung

quenzabhängigkeit (durch die Ausbreitungskonstante in Erde  $\underline{\gamma}_2$ ) berücksichtigt werden.

Für den äußeren Selbstimpedanzbelag  $\underline{Z}'_{\text{Selbst ext}}_\infty$  wird das eigene elektrische Feld des feldemittierenden Leiters entlang der Kante des Leiters integriert. Anstelle des Abstandes  $a$  wird der Leiterradius  $r$  für Einfachleiter sowie der Ersatzradius  $r_B$  für Bündelleiter verwendet:

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{\text{Selbst ext}}_\infty = & \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{2z_0}{r} - \frac{2}{(2z_0\underline{\gamma}_2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2z_0\underline{\gamma}_2} \left[ \mathbf{H}_1(2z_0\underline{\gamma}_2) - \mathbf{Y}_1(2z_0\underline{\gamma}_2) \right] \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Der gesamte Selbstimpedanzbelag für Leiter unendlicher Länge über der Erdoberfläche ergibt sich durch die Summe des Leiterresistenzbelags, des inneren Selbstimpedanzbelags und des äußeren Selbstimpedanzbelags in (8):

$$\underline{Z}'_{\text{Selbst}}_\infty = R'_{\text{Leiter}} + \underline{Z}'_{\text{Selbst int}}_\infty + \underline{Z}'_{\text{Selbst ext}}_\infty \quad (9)$$

Die Darstellungen in Gln. 7 und 9 entsprechen den Ergebnissen von Carson [1] und Pollakzek [2], wobei die Ergebnisse von den zwei Autoren durch die Reihenentwicklung ausgedrückt werden [4, 6].

#### 2.2.2 Leiter endlicher Länge

Für den allgemeinen Fall, dass  $x_{e1}$  und  $x_{e2}$  endlich sind, muss (6) für die praktische Anwendung ebenfalls vereinfacht werden. Das erste Teilintegral von (6) kann analytisch berechnet werden [4, 5]. Das zweite Teilintegral kann jedoch nach dem Stand der Technik nicht in einer geschlossenen Form ausgedrückt werden. Zur Berechnung kommt die numerische Integration dieses vollständigen Integrals in Frage, welche aber aufgrund der langen Berechnungszeit keine praktische Relevanz hat. Dieses Teilintegral hat jedoch die Form klassischer Sommerfeld-Integrale und kann mithilfe der Image-Theorie asymptotisch behandelt werden,

indem der sogenannte Reflexionskoeffizient  $R(v)$  mit einer Näherung  $R_{\text{approx}}$  approximiert wird [5]:

$$R(v) = \frac{\underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2}{\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2} \approx R_{\text{approx}}. \quad (10)$$

Diese Näherung wird dann auf das ursprüngliche Integral in (6) angewendet, wodurch eine weitere analytische Lösung ermöglicht wird.

In [5] wurde (6) mit Hilfe der Ansätze für  $R(v)$  von verschiedenen Autoren vereinfacht. Die daraus resultierenden vereinfachten Näherungsformeln für (6) wurden validiert, indem die Ergebnisse der numerischen Integration dieser Näherungsformeln mit denen der ursprünglichen Formel in (6) verglichen wurden. Durch Variation der geometrischen Anordnung, einschließlich der Leiterlänge, der Leiterhöhe, des Leiterabstands und der Verschiebung zwischen parallelen Leitern, wurden 346.500 verschiedene Kombinationen betrachtet.

Die numerischen Berechnungen der 346.500 Kopplimpedanzen mit der ursprünglichen Ansatzformel in (6) dauerten 3 Monate. Die Ergebnisse dieser Berechnungen dienten als Benchmark (Referenzergebnis) für den Vergleich mit denen der Näherungsformel basierend auf der Image-Theorie. Im Gegensatz zur numerischen Integration der ursprünglichen Ansatzformel benötigten die numerischen Integrationen mit den in [5] vorgestellten Näherungsformeln deutlich weniger Zeit für dieselbe Anzahl der Berechnungen, nämlich circa 6 min.

Unter diesen Lösungsansätzen ergab die Vierbildvariante von Mahmoud [5, 7] die kleinste maximale Abweichung von den Referenzergebnissen. Insbesondere wurden Abweichungen von weniger als 5% für die Kopplungen klassifiziert, die zur Modellierung der Leitung im Kap. 3 verwendet wurden, wie die Kopplungen eines Seils zu den parallelen Seilen desselben Spannfeldes sowie zu den Seilen der benachbarten Spannfelder davor und danach. Der Lösungsansatz nach Image-Theorie mit der Vierbildvariante wird in (11) dargestellt:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{\text{Koppel}} \approx & \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{x_{b1}}^{x_{b2}} \int_{x_{e1}}^{x_{e2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x_e - x_b)^2 + (y_e - y_b)^2 + (z_e - z_b)^2}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(z_e + z_b + \frac{2a_i}{\gamma_2}\right)^2}} \right] dx_e dx_b. \end{aligned} \quad (11)$$

Mit  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = (1 - \delta_{4\text{Bild}})$ ,  $a_3 = \left(1 + \frac{\delta_{4\text{Bild}}}{2}\right) + j\sqrt{3} \frac{\delta_{4\text{Bild}}}{2}$ ,  $a_4 = \left(1 + \frac{\delta_{4\text{Bild}}}{2}\right) - j\sqrt{3} \frac{\delta_{4\text{Bild}}}{2}$ , und  $\delta_{4\text{Bild}} = 3^{-1/3}$ . Der horizontale Abstand  $\rho$  zwischen einem Leiterelement des

feldemittierenden Leiters und einem Leiterelement des beeinflussten Leiters ist:

$$\rho = \sqrt{(x_e - x_b)^2 + (y_e - y_b)^2}, \quad (12)$$

wobei  $x_e \in [x_{e1}, x_{e2}]$  und  $x_b \in [x_{b1}, x_{b2}]$ . Für die Berechnung der äußeren Selbstimpedanz wird das Ergebnis aus (8) für Leiter endlicher Länge über der Erdoberfläche verwendet. Um die Erdstromtiefe aufgrund der endlichen Leiterlänge zu berücksichtigen, wird das Ergebnis mit dem Korrekturfaktor  $k_{\text{kor}}$  korrigiert. Dieser Korrekturfaktor wurde in der Arbeit von Liebermann [4] eingeführt.

### 3 Entwicklung des Berechnungsmodells

Der nächste Schritt beinhaltet die Entwicklung eines Berechnungsmodells, welches die Ausbreitungswiderstände der Mastender sowie die Impedanzberechnung von Leitern endlicher Länge nach Kap. 2 einbezieht.

#### 3.1 Betrachtung der Freileitung

Die Erd-/LWL-Seile sind an jedem Mast über die Übergangswiderstände zum Mast und die Ausbreitungswiderstände der Erdungsanlage geerdet. Dadurch entsteht für jedes Spannfeld ein geschlossenes Netzwerk. Es ist daher sinnvoll, die Freileitung spannfeldweise zu modellieren, d. h. jedes Spannfeld wird einzeln modelliert, wobei die Erdseile jeweils über die entsprechenden Übergangs- und Ausbreitungswiderstände geerdet sind. Da es in den Erdseilen mit unterschiedlichen Stromflüssen zu rechnen ist, werden die Kopplungen über Spannfelder hinweg berücksichtigt. Dies schließt die Kopplungen zwischen Erdseilabschnitten sowie zwischen Leiterseilen und Erdseilen benachbarter Spannfelder ein.

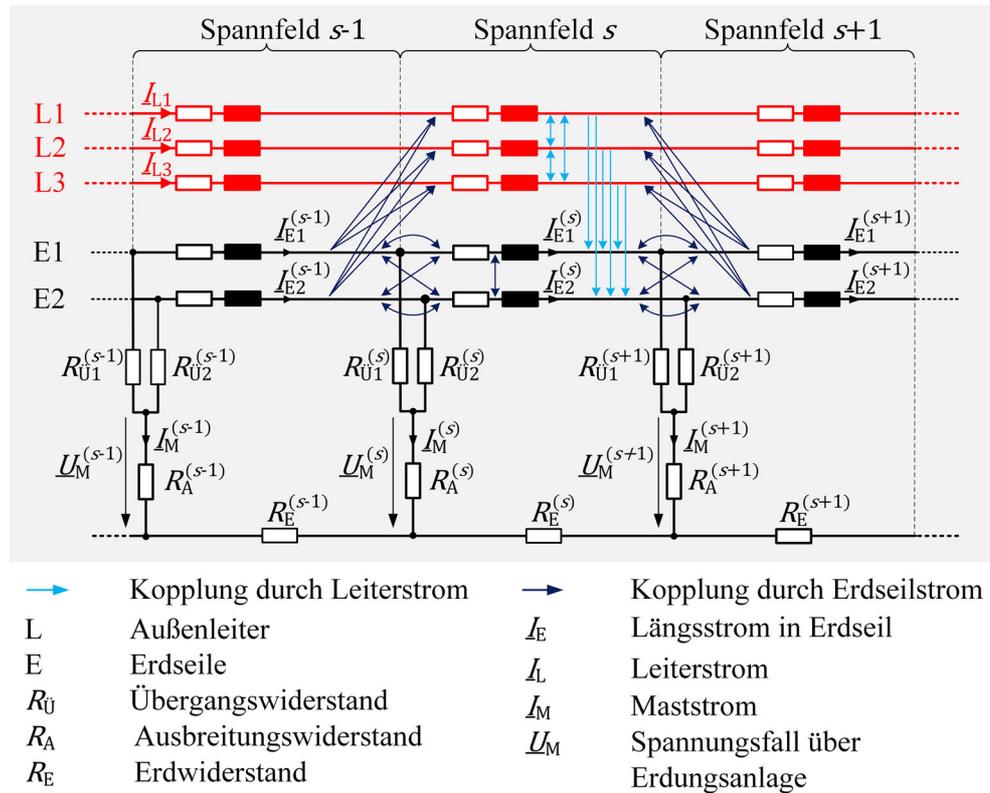
Um diese Kopplungen zu berücksichtigen, werden bei der Analyse eines beliebigen Spannfeldes  $s$  die Kopplungen mit zwei Spannfeldern davor ( $s-2$  und  $s-1$ ) und danach ( $s+1$  und  $s+2$ ) betrachtet. Die Kopplungen zwischen weiter entfernten Spannfeldern sind aufgrund der betragsmäßig deutlich kleineren Kopplimpedanzen vernachlässigbar. Zum Aufbau des Modells wird angenommen, dass alle Übergänge von Erdseilen zum Mast niederohmig sind ( $R_U = 0$ ). Dies vereinfacht das Modell und spiegelt die gängigen Praxisbedingungen wider. Darüber hinaus werden die kapazitiven Verkopplungen vernachlässigt.

Abb. 5 veranschaulicht den Aufbau eines beliebigen Spannfeldes  $s$  des Leitungsmodells (Beispiel für eine Einfachleitung mit zwei Erdseilen).

#### 3.2 Herleitung der Modellmatrix

Das Modell lässt sich mit Hilfe der Netzwerkanalyse entwickeln. Dabei werden die Strom- und Spannungsbeziehungen sowie die Knoten- und Maschengleichungen der Erdseilkette und die Kopplungen

Abb. 5 Ausschnitt des Freileitungsmodells, einschließlich Impedanzen und Verkopplungen



zwischen den Leiter- und Erdseilen durch ein vollständiges Kirchhoff'sches Gleichungssystem (VKGS) für die gesamte Leitung in Matrixform beschrieben. Zur Ableitung des VKGS werden zunächst die Spannungsänderungen am Anfang und Ende des Leiterseils eines jeden Spannfeldes bestimmt. Die allgemeine Beschreibung der Spannungsverhältnisse eines jeden Spannfeldes  $s$  kann in Matrixform wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & -E \cdot \underline{u}_L^{(s)} + \underline{z}_{LL}^{(s)} \cdot \underline{i}_L^{(s)} + E \cdot \underline{u}_L^{(s+1)} + \underline{z}_{LE}^{(s)} \cdot \underline{i}_E^{(s)} \\
 & + \underline{z}_{LE}^{(s)(s-2)} \cdot \underline{i}_E^{(s-2)} + \underline{z}_{LE}^{(s)(s-1)} \cdot \underline{i}_E^{(s-1)} + \underline{z}_{LE}^{(s)(s+1)} \cdot \underline{i}_E^{(s+1)} \quad (13) \\
 & + \underline{z}_{LE}^{(s)(s+2)} \cdot \underline{i}_E^{(s+2)} = 0
 \end{aligned}$$

Hierbei beziehen sich die Indizes  $s$ ,  $s-2$ ,  $s-1$ ,  $s+1$  und  $s+2$  auf die Spannfelder.  $\underline{u}_L^{(s)}$  und  $\underline{u}_L^{(s+1)}$  sind die Matrizen der Spannungen am Anfang und am Ende des Spannfeldes  $s$ . Die Änderung der Spannungen innerhalb des Spannfeldes  $s$  resultiert aus:

- den durch Leiterseilströme hervorgerufenen Spannungsfällen  $\underline{z}_{LL}^{(s)} \cdot \underline{i}_L^{(s)}$ ,
- induzierten Spannungen infolge der Rückwirkung der Erdseilströme im gleichen Spannfeld  $\underline{z}_{LE}^{(s)} \cdot \underline{i}_E^{(s)}$  und in den benachbarten Spannfeldern  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s-2)}$ ,  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s-1)}$ ,  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s+1)}$ ,  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s+2)}$ .

Die Impedanzen der Impedanzmatrix  $\underline{z}_{LL}^{(s)}$  werden mit Formeln für Leiter unendlicher Länge gemäß Gln. 7 und 9 berechnet, während die Impedanzen der Impedanzmatrizen  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s-2)}$ ,  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s-1)}$ ,  $\underline{z}_{LE}^{(s)}$ ,  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s+1)}$  und  $\underline{z}_{LE}^{(s)(s+2)}$  mit Formeln für Leiter endlicher Länge gemäß (11) berechnet werden. Für die Knoten gilt dann, unter Vernachlässigung der Kapazitäten:

$$-E \cdot \underline{i}_L^{(s)} + E \cdot \underline{i}_L^{(s+1)} = 0 \quad (14)$$

Die Erdseile sind an jedem Mast über den Übergangswiderstand und den Ausbreitungswiderstand der Masterdungsanlage geerdet. Die Spannungsfälle über Erdseilen im Spannfeld  $s$  werden in Matrixform wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{u}_E^{(s)} = & \underline{z}_{EL}^{(s)} \cdot \underline{i}_L^{(s)} + \underline{z}_{EE}^{(s)} \cdot \underline{i}_E^{(s)} + \underline{z}_{EE}^{(s)(s-2)} \cdot \underline{i}_E^{(s-2)} \\
 & + \underline{z}_{EE}^{(s)(s-1)} \cdot \underline{i}_E^{(s-1)} + \underline{z}_{EE}^{(s)(s+1)} \cdot \underline{i}_E^{(s+1)} + \underline{z}_{EE}^{(s)(s+2)} \cdot \underline{i}_E^{(s+2)}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Für die U-I-Relation des Mastes  $s$  gilt:

$$R_A^{(s)} \cdot \underline{i}_M^{(s)} - \underline{U}_M^{(s)} = 0 \quad (16)$$

Dabei sind  $R_A^{(s)}$ ,  $\underline{i}_M^{(s)}$ ,  $\underline{U}_M^{(s)}$  der Ausbreitungswiderstand der Masterdungsanlage, der Maststrom und der Spannungsfall über die Erdungsanlage des Mastes  $s$ .

Da die Widerstände der Erdrückleitung  $R_E^{(s)}$  in den Selbst- und Koppelimpedanzen enthalten sind, stellt die Erde einen gemeinsamen Superknoten dar. Die

Knotengleichungen für jedes Spannfeld sind wie folgt zu beschreiben:

$$\sum_{j=1}^{n_{ES}^{(s-1)}} I_{Ej}^{(s-1)} - I_M^{(s)} - \sum_{j=1}^{n_{ES}^{(s)}} I_{Ej}^{(s)} = 0. \quad (17)$$

Dabei sind  $n_{ES}^{(s)}$  und  $n_{ES}^{(s-1)}$  die Anzahl der Erdseile, und  $I_{Ej}^{(s)}$  und  $I_{Ej}^{(s-1)}$  der Strom des Erdseils  $j$  im Spannfeld  $s$  bzw.  $s-1$ .

Die unabhängigen Maschengleichungen der Erdseil-Mast-Erde-Schleife werden wie folgt formuliert:

$$E \cdot \underline{U}_M^{(s)} - E \cdot \Delta \underline{U}_E^{(s)} - E \cdot \underline{U}_M^{(s+1)} = 0 \quad (18)$$

Alle Gleichungen von (13) bis (18) für alle Spannfelder bilden ein VKGS in (19):

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{UI-Beziehung} \\ \text{der} \\ \text{LS} \\ \text{Kopplung auf} \\ \text{Erdseile durch} \\ \text{Ströme in LS} \end{array} \right]}_{\mathbf{M}_{\text{Ltg}}} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Rückkopplung auf} \\ \text{Leiterseile durch} \\ \text{Ströme in ES} \\ \text{UI-Beziehung, Maschen- und} \\ \text{Knotengleichung der} \\ \text{Erdseilkette} \end{array} \right]}_{\mathbf{m}_{\text{Zustand}}} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \underline{U}_L, \underline{I}_L \\ \text{aller} \\ \text{Spannfelder} \\ \underline{U}_M, \Delta \underline{U}_E, \underline{I}_L \\ \text{aller} \\ \text{Spannfelder} \end{array} \right]}_{\mathbf{m}_{\text{UI-Ltg}}} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Matrix für} \\ \text{Schalt-} \\ \text{zustände} \\ \mathbf{0} \end{array} \right]}_{\mathbf{m}_{\text{Zustand}}} \quad (19)$$

Die vollständige Darstellung dieses VKGS ist in [5] zu finden. Dieses Gleichungssystem wird dann in Matrixform gelöst, um die Strom- und Spannungsverhältnisse in den Leitungen zu bestimmen.

### 3.3 Berechnung der Leitungsparameter

Zur Berechnung der Leitungsparameter werden die Messschaltungen einer Leitungsparametermessung in der Untermatrix für U-I-Beziehung der Leiterseile in  $\mathbf{M}_{\text{Ltg}}$  sowie in Untermatrix für die Angabe der Spannung oder Ströme in  $\mathbf{m}_{\text{Zustand}}$  berücksichtigt. Das Gleichungssystem in (19) wird durch Lösen des VKGS mittels Invertierung bestimmt:

$$\mathbf{m}_{\text{UI-Ltg}} = \mathbf{M}_{\text{Ltg}}^{-1} \cdot \mathbf{m}_{\text{Zustand}} \quad (20)$$

Basierend auf dem Ergebnis von (20) können aus  $\mathbf{m}_{\text{UI-Ltg}}$  die Vektormatrix der Spannungen  $\underline{u}_L^{(1)}$  und die Vektormatrix der Ströme  $\underline{i}_L^{(1)}$  am Anfang der Leitung

abgeleitet werden. Mit diesen Spannungen und Strömen werden die Leitungsparameter berechnet. Für die Null- und Mitimpedanz eines Stromkreises gilt:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_{L1}^{(1)} + \underline{U}_{L2}^{(1)} + \underline{U}_{L3}^{(1)}}{\underline{I}_{L1}^{(1)} + \underline{I}_{L2}^{(1)} + \underline{I}_{L3}^{(1)}} \quad \underline{Z}_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{\underline{U}_{L1}^{(1)}}{\underline{I}_{L1}^{(1)}} + \frac{\underline{U}_{L2}^{(1)}}{\underline{I}_{L2}^{(1)}} + \frac{\underline{U}_{L3}^{(1)}}{\underline{I}_{L3}^{(1)}} \right) \quad (21)$$

Zur Berechnung der Längsströme in Erd-/LWL-Seilen sowie die Mastströme für einen bestimmten Betriebszustand werden auch die Vorgaben der Spannungen und Ströme am Anfang der Leitung sowie der Lastzustand am Ende der Leitung ebenfalls in den Untermatrizen von  $\mathbf{M}_{\text{Ltg}}$  und  $\mathbf{m}_{\text{Zustand}}$  berücksichtigt. Nach der Lösung des Gleichungssystems in (19) gemäß (20) können die Mastströme und die Längsströme in den Seilen aus  $\mathbf{m}_{\text{UI-Ltg}}$  bestimmt werden.

### 4 Validierung des Leitungsmodells

Das in Kap. 3 beschriebene Leitungsmodell wurde in MATLAB implementiert und validiert. Die erste Validierung erfolgte anhand einer fiktiven und ideal verdrehten Doppelleitung mit Donaumasten gleicher Bauart (siehe Abb. 6).

Unter der Annahme, dass die Ausbreitungswiderstände der Erdungsanlage niederohmig sind und durch Verwendung der Formeln für unendlich lange Leiter (vgl. (7) und (9)) wird das erweiterte Leitungsmodell auf die Annahmen der Modellierung konventioneller Modelle zurückgeführt. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse von dem entwickelten Modell mit denen der konventionellen Berechnungsmethode unter Verwendung der symmetrischen Komponenten übereinstimmen.

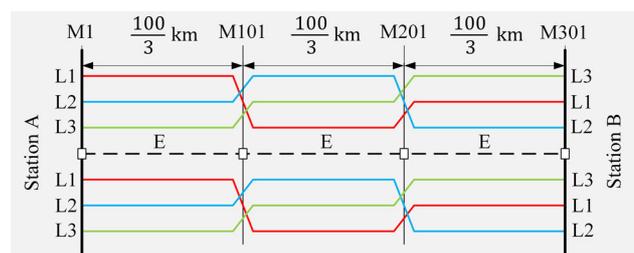


Abb. 6 Fiktive Standard-Leitung zur Validierung des Leitungsmodells

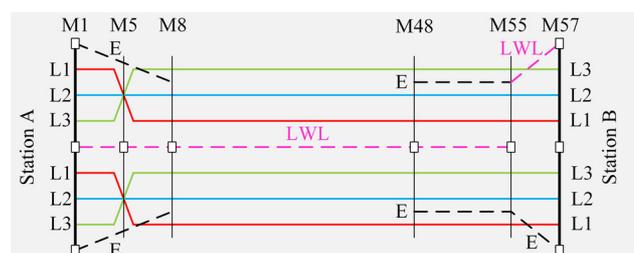


Abb. 7 Reale Freileitung zur Validierung des Leitungsmodells

**Tab. 1** Vergleich zwischen der gemessenen und der berechneten symmetrischen Impedanz

Symmetrischen Impedanz	$Z_0$	$Z_{0v}$	$Z_{0g}$	$Z_1$
Gemessen in $\Omega$	18,4394	13,3765	9,8685	5,6744
Berechnet in $\Omega$	18,3877	13,1470	9,8744	5,6286
Abweichung in %	0,28	1,72	0,06	0,081

Eine weitere Validierung wurde anhand einer realen Freileitung entsprechend Abb. 7 durchgeführt. Dabei wurden die gemessenen Mastausbreitungswiderstände, welche messtechnisch erfasst wurden, bei der Modellbildung einbezogen.

Der Vergleich zwischen den berechneten und gemessenen Mit- und Nullimpedanzen dieser Leitung zeigte eine gute Übereinstimmung bei einem spezifischen Erdwiderstand von  $\rho_E = 50 \Omega\text{m}$ , wobei die Abweichungen der Mit- und Nullimpedanzen im Vergleich zu den Messwerten unter 2 % liegen.

In Tab. 1 sind die symmetrischen Impedanzen der Messung und der Berechnung sowie deren Vergleich aufgeführt. Hierbei bezeichnet  $Z_0$  die Nullimpedanz eines Drehstromsystems dieser Doppelleitung, während das andere System isoliert bleibt.  $Z_{0v}$  repräsentiert die verkürzte Nullimpedanz eines Systems, bei dem das andere System an beiden Seiten geerdet ist.  $Z_{0g}$  steht für die gegenseitige Nullimpedanz zwischen den beiden Systemen der Leitung. Schließlich bezeichnet  $Z_1$  die Mitimpedanz eines Systems der Leitung.

## 5 Einflussfaktoren auf die Leitungsparameter

Die Ergebnisse zusätzlicher Berechnungen mit höherem spezifischem Erdwiderstand zeigen, dass die Abweichung zwischen den berechneten und gemessenen Nullimpedanzen mit steigendem spezifischem Erdwiderstand zunimmt, während die Mitimpedanz konstant bleibt. Folglich wurde das Modell, das die Leitung in Abb. 7 validiert, verwendet, um eine Studie durchzuführen, die darauf abzielt, die Faktoren

zu identifizieren, die die Nullimpedanz beeinflussen. Folgende Einflussfaktoren wurden berücksichtigt:

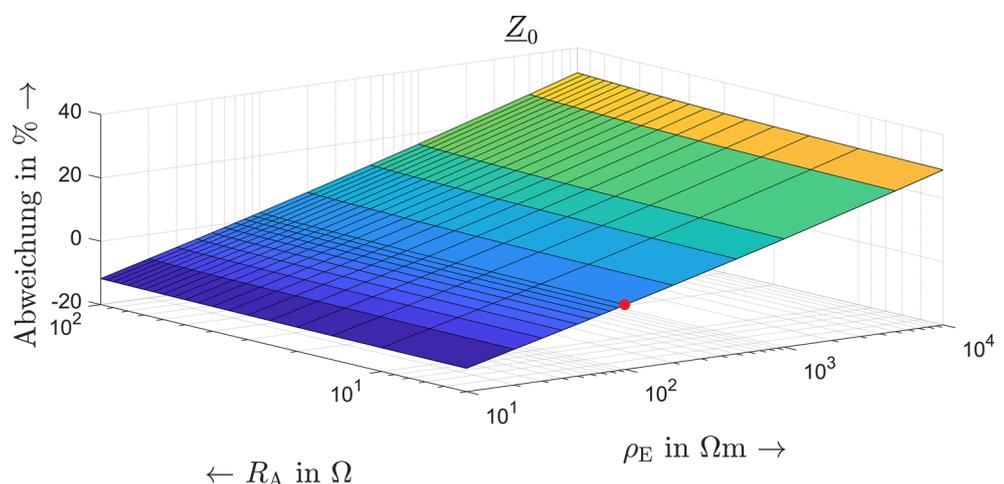
1. Spezifischer Erdwiderstand  $\rho_E$
2. Mastausbreitungswiderstand  $R_A$
3. Bodenabstand
4. Material der Freileitungsseile Mastgeometrie
5. Anzahl und Lage der ausgeführten Erdseile
6. Verdrillung

Das Ergebnis dieser Studie zeigt, dass die Abweichung der Nullimpedanz mit zunehmendem spezifischem Erdwiderstand und Mastausbreitungswiderstand steigt. Abb. 8 und 9 veranschaulichen die Abweichung der Nullimpedanz  $Z_0$  bzw. der verkürzten Nullimpedanz  $Z_{0v}$  eines Drehstromsystems der Doppelleitung vom Referenzfall (roter Punkt), bei dem die Nullimpedanz mit einem Mastausbreitungswiderständen  $R_A = 0 \Omega$  und einem spezifischem Erdwiderstand  $\rho_E = 100 \Omega\text{m}$  berechnet wurde.

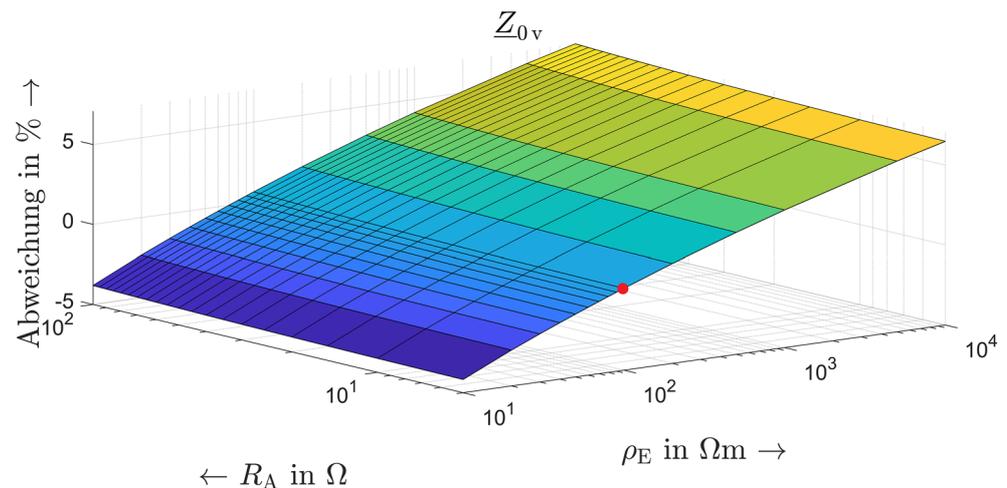
Es wurde festgestellt, dass Faktoren, die die Erdung betreffen, wie die Anzahl und Positionierung der Erdseile, einen signifikanten Einfluss auf die Änderung der Nullimpedanz haben. Betrachtet man die Erdseile, so wird deutlich, dass die Nullimpedanz umso geringer ist, je mehr Erdseile vorhanden sind. Darüber hinaus nimmt die Nullimpedanz ab, je näher die Erdseile an den Leiterseilen positioniert sind. Dies liegt daran, dass Erdseile in Verbindung mit dem Boden einen Rückweg für den Stromfluss bieten.

Zusätzlich ist die verkürzte Nullimpedanz  $Z_{0v}$  am wenigsten empfindlich gegenüber Parameteränderungen. Dies liegt daran, dass in diesem Zustand das zweite Drehstromsystem auf beiden Seiten geerdet ist. Die drei Leiter dieses Systems verhalten sich

**Abb. 8** Abweichung der Nullimpedanz  $Z_0$  bei Änderung von  $R_A$  und  $\rho_E$  gegenüber dem Referenzfall



**Abb. 9** Abweichung verkürzten Nullimpedanz  $Z_{0v}$  bei Änderung von  $R_A$  und  $\rho_E$  gegenüber dem Referenzfall



dann wie drei Erdseile, die noch mehr Rückweg für den Stromfluss bieten und somit den Einfluss von erdungsbezogenen Faktoren verringern.

Des Weiteren hat die Geometrie des Mastes einen erheblichen Einfluss auf die Nullimpedanzen aufgrund der Positionierung der Erdseile auf dem Mast und der Positionen der Phasen zueinander, die bei unterschiedlichen Mastgeometrien variieren. Diese Studie zeigt auch, dass Faktoren wie Bodenabstand, Material der Leiter- und Erdseile keinen signifikanten Einfluss auf die Nullimpedanz haben. Darüber hinaus hat die Art der Verdrillung keinen Einfluss auf die Nullimpedanz.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein Freileitungsmodell entwickelt, das die endliche Leitungslänge der Erdseile und die Mastausbreitungswiderstände der Masten berücksichtigt. Durch Nachbildung der Leiter durch die Aneinanderreihung der Hertz'schen Dipole ergibt sich die Integralformel zur Berechnung der Koppelimpedanzen, welche durch Anwendung der Image-Theorie vereinfacht werden kann. Der numerische Rechenaufwand wird dadurch signifikant verringert.

Das Leitungsmodell wurde mit Hilfe der Netzwerkanalyse entwickelt, wobei sich die elektrischen Größen der Leitung durch ein vollständiges Kirchhoff'sches Gleichungssystem beschreiben lassen. Durch Lösen dieses Gleichungssystems können alle Betriebsparameter der Freileitung bestimmt werden. Die Validierung des Modells anhand einer fiktiven und einer realen Freileitung bestätigt die Zuverlässigkeit dieses Modells. Mit dem Modell wurden Parameterstudien durchgeführt, um die Einflussfaktoren auf die Nullimpedanzen zu ermitteln.

Für zukünftige Arbeiten könnten die Lösungsansätze mit der Image-Theorie durch die Berücksichtigung der Ansätze für den Reflexionsfaktor anderer Autoren verbessert werden. Auch sollten zukünftig kapazitive Effekte im Modell berücksichtigt werden, um die Genauigkeit weiter zu erhöhen und die Anwendbarkeit

des Modells auf komplexere Freileitungsstrukturen zu erweitern.

**Funding** Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

**Open Access** Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

## Literatur

1. Carson JR (1926) Wave propagation in overhead wires with ground return. *Bell Syst Tech J* 5(4):539–554. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1926.tb00122.x>
2. Pollaczek F (1926) Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen. *Einfachleitung Elektrische Nachrichtentechnik* 3(4):339–359
3. Sunde ED (1968) *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*. Dover Publications, New York
4. Liebermann C (2015) *Berechnung induzierter Spannungen bei Leiter- und Erdseilzug auf 380-kV-Freileitungen*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden
5. Nguyen TB (2023) *Erarbeitung eines Modells zur Berechnung der Nullimpedanz von Freileitungen unter Berücksichtigung der endlichen Leitungslänge und Zusatzwiderständen an den Erdungspunkten von Erdseilen*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden

6. Meyer EP (1982) Stromrückleitung über das Erdreich, Impedanzen und induktive Beeinflussung bei Leitern endlicher Länge. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt
7. Mahmoud SF, Metwally AD (1981) New image representation for dipoles near a dissipative earth 1. Discrete images. Radio Sci 16(6):1271–1275. <https://doi.org/10.1029/RS016i006p01271>

**Hinweis des Verlags** Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.



**Thanh Binh Nguyen**, schloss im Jahr 2023 sein Studium der Elektrotechnik mit Schwerpunkt auf elektrische Energieversorgung als Diplom-Ingenieur an der Technischen Universität Dresden ab. Seitdem ist er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Elektrische Energieversorgung derselben Universität tätig. Seine Forschungsschwerpunkte liegen in der Berechnung von Betriebsparametern und der Analyse der Beeinflussung auf

Freileitungen



**Carlo Liebermann**, schloss 2015 sein Studium der Elektrotechnik an der Technischen Universität Dresden mit dem Diplom ab. Seitdem arbeitet er an der Professur für Elektrische Energieversorgung, TU Dresden, an welcher er 2017 auch sein Dissertationsvorhaben startete. Seine Forschung fokussiert das Thema der Hochspannungsbeeinflussung, in dem die Verdrillung bei komplexen Leitungsstrukturen im Fokus steht



**Peter Schegner**, ist Professor an der Technischen Universität Dresden und zurzeit Direktor des Institutes für Elektrische Energieversorgung und Hochspannungstechnik. Er studierte elektrische Energietechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Er promovierte an der Universität des Saarlandes mit einer Dissertation zum Thema Erdschlussdistanzschutz. Herr Prof. Schegner leitet zahlreiche Forschungsprojekte, auf den Gebieten: Planung und Betrieb elektrischer Netze, Entwurf und Betrieb von Smart Grids, Selektivschutz- und Automatisierungstechnik und Stabilität elektrischer Netze