What do numerical analysts need the Koszul complex for?

Oliver Sander, TU Dresden, Faculty of Mathematics

6. 11. 2023

1 Motivation: Finite-Elemente-Verfahren für die Poisson-Gleichung

Numeriker interessieren sich für Näherungslösungen von partiellen Differentialgleichungen.

Sei Ω eine offene beschränkte Menge in $\mathbb{R}^d$ (meistens $d = 2$ oder $d = 3$) mit polyhedralem Rand.

Beispiel 1.1 (Randwertproblem für die Poisson-Gleichung)**.** Finde eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= f \qquad \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine hinreichend glatte gegebene Funktion sein soll.

1.1 Die schwache Formulierung

Für die Finite-Elemente-Methode führen wir zunächst die schwache (oder variationelle) Form ein.

Sei H^1 die Menge aller Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ mit quadratintegrabler schwacher Ableitung.

Sei $\mathring{H}^1$ die Menge aller Funktionen in H^1 die auf dem Rand von Ω verschwinden.

Multipliziere die Poisson-Gleichung mit $v \in \mathring{H}^1$, integriere und wende die Greensche Formel an:

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \tag{1}$$

Gesucht wird jetzt ein $u \in \mathring{H}^1$ das diese Gleichung für alle $v \in \mathring{H}^1$ erfüllt.

Tatsächlich gilt dann:

Lemma 1.2. *Das Variationsproblem* (1) *hat eine eindeutige Lösung in $\mathring{H}^1$, wenn mit allen $v \in \mathring{H}^1$ getested wird, und $f \in L^2(\Omega)$. Die Lösung hängt stetig von f ab.*

1.2 Finite Elemente

Für die numerische Approximation von u approximieren wir H^1 durch einen endlichdimensionalen Teilraum $V_h \in H^1$.

Das Finite-Elemente-Problem ist dann: Finde $u_h \in V_h \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ so dass

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx \qquad \forall v_h \in V_h \cap \mathring{H}^1.$$

- Auch dieses Problem hat eine eindeutige Lösung.

Die Finite-Elemente-Methode konstruiert V_h als Raum von stückweise polynomiellen Funktionen.
Sei dafür $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω, und $h > 0$ der größte vorkommende Dreiecksdurchmesser.

Beispiel 1.3 (Lagrange Finite Elemente)**.** Der Raum

$$S_h^p := \Big\{ v \in C(\Omega) \;:\; v|_T \text{ ist ein Polynom vom Grad höchstens } p \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \Big\}$$

heißt Raum der Lagrange-Finite-Elemente p-ter Ordnung.

- Solche Funktionen sind schwach differenzierbar: $S_h^p \in H^1$.
- Man kann zeigen dass der Fehler $\|u - u_h\|$ für verschiedene Normen wie eine Potenz von h gegen Null konvergiert, wenn das Gitter immer feiner wird.

2 Der de-Rham-Komplex

Die Poissongleichung $-\operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$ ist ein Spezialfall der Hodge-Laplace-Gleichung im de-Rham-Komplex

Definition 2.1 (de-Rham-Komplex in $\mathbb{R}^3$)**.** *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^3$. Der de-Rham-Komplex ist*

$$0 \longrightarrow H^1 \xrightarrow{\text{grad}} H(\text{curl}) \xrightarrow{\text{curl}} H(\text{div}) \xrightarrow{\text{div}} L^2 \longrightarrow 0.$$

Der duale Komplex ist

$$0 \longleftarrow L^2 \xleftarrow[-\text{div}]{} \mathring{H}(\text{div}) \xleftarrow[\text{curl}]{} \mathring{H}(\text{curl}) \xleftarrow[-\text{grad}]{} H^1 \longleftarrow 0.$$

Dies ist tatsächlich ein Komplex, da bekanntlich $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{curl} u = 0$.

3 Hilbertkomplexe und die Hodge-Laplace-Gleichung

Das verallgemeinern wir jetzt.

Sei (V, d) ein Hilbertkomplex

$$\dots \xrightarrow{d} V^{k-1} \xrightarrow{d} V^k \xrightarrow{d} V^{k+1} \xrightarrow{d} \dots$$

mit dualem Komplex

$$\dots \xleftarrow[d^*]{} V_{k-1} \xleftarrow[d^*]{} V_k \xleftarrow[d^*]{} V_{k+1} \xleftarrow[d^*]{} \dots$$

In jedem solchen Komplex gibt es den Hodge-Laplace-Operator

$$L : V \to V \qquad L := dd^* + d^*d.$$

Wir wollen die *Hodge-Laplace-Gleichung*

$$L^k u = f$$

für ein gegebenes $f \in V^k$ (numerisch) lösen.

Die Lösbarkeit dieser Gleichung hängt eng mit dem Raum

$$\mathfrak{H}^k := \{u \in V^k \;:\; du = 0,\; d^*u = 0\}$$

der *harmonischen Formen* zusammen.

Lemma 3.1. $\mathcal{N}(L^k) = \mathfrak{H}^k$.

(Daher kommt die Bezeichnung *harmonisch.*)

Lösungen der Hodge-Laplace-Gleichung

$$L^k u = f$$

sind also immer nur bis auf ein Element aus $\mathfrak{H}^k$ eindeutig.
Wir fordern deshalb zusätzlich

$$u \perp \mathfrak{H}^k.$$

Damit überhaupt eine Lösung existiert muss $f \perp \mathfrak{H}^k$ gelten.

4 Approximation von Hilbert-Komplexen

Zur numerischen Approximation der Hodge-Laplace-Gleichung ersetzen wir die Räume V^k des Hilbert-Komplexes durch endlich-dimensionale Unterräume

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \xrightarrow{d} & V^{k-1} & \xrightarrow{d} & V^k & \xrightarrow{d} & V^{k+1} & \xrightarrow{d} & \dots \\
 & & \subset\uparrow & & \subset\uparrow & & \subset\uparrow & & \\
\dots & \xrightarrow{d} & V_h^{k-1} & \xrightarrow{d} & V_h^k & \xrightarrow{d} & V_h^{k+1} & \xrightarrow{d} & \dots
\end{array}$$

Unter welchen Umständen kann man jetzt ein konvergentes, wohldefiniertes Approximationsverfahren erwarten?

Die *Finite Element Exterior Calculus*-Theorie sagt: Die Teilräume V_h müssen drei Eigenschaften erfüllen.

Approximation Die Räume V_h^k sollen die Räume V^k „gut approximieren“.
Was das genau heißt ist situationsabhängig.

Unterkomplex Wir fordern dass

$$\dots \longrightarrow V_h^{k-1} \xrightarrow{d} V_h^k \xrightarrow{d} V_h^{k+1} \longrightarrow \dots$$

ein Unterkomplex von

$$\dots \longrightarrow V^{k-1} \xrightarrow{d} V^k \xrightarrow{d} V^{k+1} \longrightarrow \dots$$

ist.
Das diskrete Differential

$$d_h^k : V_h^k \to V_h^{k+1}$$

ist einfach die Restriktion von d^k auf V_h^k.

Das diskrete Differential d_h^k hat einen adjungierten Operator d_{hk}^*.

- Der Operator d_{hk}^* ist aber im Allgemeinen *nicht* die Restriktion von d_k^* auf V_h^k.
- Aber es gibt eine diskrete Hodge-Zerlegung

$$V_h^k = \mathfrak{B}_h^k \oplus \mathfrak{H}_h^k \oplus \mathfrak{B}_{hk}^*.$$

Beschränkte Kokettenprojektion Wir brauchen einen noch engeren Zusammenhang zwischen dem Ursprungskomplex und seiner Diskretisierung.

Gefordert wird dass eine *beschränkte Kokettenprojektion* π_h vom Ausgangskomplex zum diskreten Komplex existiert.

Interpretation: In der klassischen Theorie ist dies der Interpolationsoperator, für Lagrange-Elemente zum Beispiel punktweise Interpolation oder Clément-Interpolation.

Was meinen wir mit „beschränkte Kokettenprojektion“?

Projektion Für alle k ist π_h^k eine lineare Abbildung $V^k \to V_h^k$, und ihre Restriktion auf V_h^k ist die Identität.

Kokettenabbildung Das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} V^{k-1} & \xrightarrow{d} & V^k & \xrightarrow{d} & V^{k+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_h^{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_h^k} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_h^{k+1}} \\ V_h^{k-1} & \xrightarrow{d} & V_h^k & \xrightarrow{d} & V_h^{k+1} \end{array}$$

Beschränktheit $\|\pi_h v\|^2 \leq c\|v\|^2$.

5 Finite Elemente und Differentialformen

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit polyhedralem Rand.

Auf Ω betrachten wir den de-Rham-Komplex der Differentialformen auf Ω mit Glattheit H:

$$\dots \longrightarrow H\Lambda^{k-1}(\Omega) \xrightarrow{d} H\Lambda^k(\Omega) \xrightarrow{d} H\Lambda^{k+1}(\Omega) \xrightarrow{d} \dots$$

Für die Hodge-Laplace-Gleichung brauchen wir noch den adjungierten Operator.

- Angenommen Ω habe eine Riemannsche Metrik. Dann gibt es den Hodge-Stern-Operator und das Skalarprodukt

$$\langle \omega, \mu \rangle_{L^2\Lambda^k} = \int_\Omega \langle \omega, \mu \rangle_{\mathrm{Alt}^k} \operatorname{vol} = \int_\Omega \omega \wedge \star\mu.$$

Definition 5.1. *Das Kodifferential δ ist der Operator*

$$\delta^k : \Lambda^k \to \Lambda^{k-1}, \qquad \delta^k = \pm \star d^{n-k} \star.$$

Dabei ist das Vorzeichen so gewählt dass

$$\star\delta^k\omega = (-1)^k d^{n-k} \star \omega.$$

Äquivalent:

$$\langle d\omega, \nu \rangle_{L^2\Lambda^{k+1}} = \langle \omega, \delta\nu \rangle_{L^2\Lambda^k} + \int_{\partial\Omega} \operatorname{tr} \omega \wedge \operatorname{tr} \star\nu.$$

An dieser Formel sieht man dass δ tatsächlich der adjungierte Operator ist.

Damit können wir die starke Form der Hodge-Laplace-Gleichung hinschreiben: Für ein $f \in L^2\Lambda^k(\Omega)$, finde ein $u \in L^2\Lambda^k(\Omega)$ so dass

$$\begin{aligned} (\delta d + d\delta)u &= f - P_{\mathfrak{H}^k} f && \text{in } \Omega \\ \operatorname{tr} \star u = 0, \qquad \operatorname{tr} \star du &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \\ u &\perp \mathfrak{H}^k. \end{aligned}$$

Hier sind $\mathfrak{H}^k$ gerade die harmonischen Formen, also die $p \in \Lambda^k$ für die $dp = 0$, $\delta p = 0$ und $\operatorname{tr} *p = 0$.

Die Randbedingungen folgen aus der Definition der dualen Räume.

Für dieses Problem wollen wir jetzt Finite Elemente konstruieren.

Das heißt, wir bauen Teilräume $V_h^{k-1} \subset H\Lambda^{k-1}(\Omega)$, die die oben beschriebenen drei Bedingungen erfüllen:

1. Die Räume müssen gute Approximationseigenschaften haben.
2. Sie müssen einen Unterkomplex von $H\Lambda^{k-1} \longrightarrow H\Lambda^k \longrightarrow H\Lambda^{k+1}$ bilden:
$$V_h^{k-1} \xrightarrow{\ d\ } V_h^k \xrightarrow{\ d\ } V_h^{k+1}.$$
3. Es muss eine beschränkte Projektion $\pi : H\Lambda^k \to V_h^k$ geben, die mit der Ableitung kommutiert.

Die schwache Formulierung ist dann wohlgestellt und liefert Approximationen die mit optimaler Rate konvergieren.

5.1 Finite Elemente

Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von Ω.

Wir bauen jetzt Räume von Differentialformen deren Koeffizienten stückweise Polynome sind.

Genauer bauen wir für jede Dimension $n \geq 1$, für jeden Grad $0 \leq k \leq n$ und jeden Polynomgrad $r \geq 1$ zwei Finite-Elemente-Teilräume von $H\Lambda^k(\Omega)$, genannt
$$\mathcal{P}_r\Lambda^k(\mathcal{T}_h) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{P}_r^-\Lambda^k(\mathcal{T}_h).$$

- Der erste Raum benutzt den vollständigen Polynomraum auf jedem Simplex.
- Der zweite Raum nimmt nur einen Teil der Polynome.

  Diese FE-Räume heißen *gestutzt* (engl. *trimmed*).

Die beiden Räume bilden eine Art kanonische Diskretisierungen des de-Rham-Komplexes.

Sei T ein Simplex aus der Triangulierung $\mathcal{T}_h$. Wie üblich definieren wir ein Finites Element auf T durch zwei Dinge:

1. Einen endlich-dimensionalen Funktionenraum $V(T)$ auf T.
2. Eine Menge von Freiheitsgraden, d.h. eine Menge von linear unabhängigen linearen Funktionalen auf $V(T)$.

Übliche Freiheitsgrade sind z.B. Punktwerte, Kantenmittelwerte, oder höhere Momente.

Der globale FE-Raum besteht dann aus allen Funktionen auf Ω so dass die Restriktion auf T in $V(T)$ liegt, und die Freiheitsgrade *einwertig* sind.

Soll heißen: Auf einem gemeinsamen Teilsimplex von zwei Simplizes T_1, T_2 stimmen die korrespondierenden Freiheitsgrade überein.

Sei $\mathcal{P}_r(T)$ die Menge aller Polynome in n Variablen vom Grad höchstens r.

Definition 5.2. *Sei $\mathcal{P}_r\Lambda^k(T)$ die Menge aller k-Formen auf T mit Koeffizientenfunktionen die Polynome von Grad nicht größer als r sind:*
$$\mathcal{P}_r\Lambda^k(T) = \Big\{ \sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n} p_\sigma \, dx^\sigma \ : \ p_\sigma \in \mathcal{P}_r(T) \Big\}.$$

Die Dimension dieses Raumes ist

$$\dim \mathcal{P}_r\Lambda^k(T) = \binom{n}{k} \dim \mathcal{P}_r(T) = \binom{r+n}{r+k}\binom{r+k}{r}.$$

Man beachte dass für jedes $\omega \in \mathcal{P}_r\Lambda^k$

$$d\omega = \sum_{\sigma}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_\sigma}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma_k}.$$

$\implies$ Der Formgrad geht hoch, der Polynomgrad geht runter:

$$d\mathcal{P}_r\Lambda^k \subset \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^{k+1}.$$

Wir bekommen also einen Unterkomplex des de-Rham-Komplexes der nur aus Polynomen besteht:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_r\Lambda^0 \xrightarrow{d} \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{P}_{r-n}\Lambda^n \longrightarrow 0.$$

Dieser Komplex ist sogar exakt:

- Falls $\omega \in P_r\Lambda^k$ mit $k > 0$ und $d\omega = 0$, dann gibt es ein $\mu \in \mathcal{P}_{r+1}\Lambda^{k-1}$ mit $d\mu = \omega$.

5.2 Der Koszul-Komplex

(Nach Jean-Louis Koszul, 1921–2018, einem Schüler von Henri Cartan)

Als technisches Hilfsmittel führen wir den Koszul-Komplex ein.

- Sei $x \in \Omega$.
- Da Ω offen in $\mathbb{R}^n$ ist kann der Tangentialraum $T_x\Omega$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden.
- Insbesondere kann ich $x \in \Omega$ als einen Vektor in seinem eigenen Tangentialraum interpretieren.

Definition 5.3. *Das Koszul-Differential $\kappa\omega$ einer k-Differentialform ω ist die $k-1$-Form für die*

$$(\kappa\omega)_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_x(x, v_1, \dots, v_{k-1}) \qquad \forall x \in \Omega, \quad v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n.$$

- $\kappa\omega = 0$ für alle $\omega \in \Lambda^0(\Omega)$.
- $\omega(x, x, \dots) = 0$, deswegen ist $\kappa \circ \kappa = 0$, und κ ist das Differential in einem Komplex.

Beispiel 5.4 (Die 1-Form dx^i)**.**

$$\kappa(dx^i) = dx^i(x) = x^i$$

Lemma 5.5 (Leibnizregel / Produktregel)**.** *Für alle $\omega \in \Lambda^k$ und $\mu \in \Lambda^j$ gilt*

$$\kappa(\omega \wedge \mu) = (\kappa\omega) \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge (\kappa\mu).$$

Außerdem gilt

$$\kappa(f\omega) = f\kappa\omega$$

für jede Funktion f und jede Differentialform ω.

Beispiel 5.6 (Vektor-Proxies)**.**

- Sei ω eine 1-Form, also

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx^i.$$

Dann ist

$$\kappa\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\kappa(dx^i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x^i = \langle f(x), x\rangle.$$

- Sei $n = 3$ und ω eine 2-Form:

$$\omega = f_1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 - f_2(x)dx^1 \wedge dx^3 + f_3(x)dx^1 \wedge dx^2.$$

Dann ist

$$k\omega = f(x) \times x.$$

- Sei ω eine n-Form

$$\omega = f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Dann ist $\kappa\omega = f(x)x$.

5.3 Die Homotopieformel

Wir hatten gesehen dass die äußere Ableitung d den Raum $\mathcal{P}_r\Lambda^k$ auf $\mathcal{P}_{r-1}\Lambda^{k+1}$ abbildet.

Das Koszul-Differential arbeitet umgekehrt: Es bildet $\mathcal{P}_r\Lambda^k$ auf $\mathcal{P}_{r+1}\Lambda^{k-1}$ ab.

Sowohl κd also auch $d\kappa$ sind also Abbildungen von $\mathcal{P}_r\Lambda^k$ auf sich selbst. Es gilt aber noch mehr:

Definition 5.7 (Homogene Polynome)**.** *Wir schreiben $\mathcal{H}_r\Lambda^k$ für den Raum aller k-Differentialformen deren Koeffizientenfunktionen homogene Polynome vom Grad r sind.*

Satz 5.8 (Homotopieformel, Arnold [1, Theorem 7.1])**.** *Für alle $\omega \in \mathcal{H}_r\Lambda^k$ gilt*

$$(d\kappa + \kappa d)\omega = (k + r)\omega.$$

Diese Formel hat viele interessante Konsequenzen.

Korollar 5.9. *Sowohl der polynomielle de-Rham-Komplex*

$$\mathcal{P}_r\Lambda^0 \xrightarrow{d} \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{P}_{r-n}\Lambda^n \xrightarrow{d} 0$$

als auch der Koszul-Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_{r-n}\Lambda^n \xrightarrow{\kappa} \mathcal{P}_{r-n+1}\Lambda^{n-1} \xrightarrow{\kappa} \dots \xrightarrow{\kappa} \mathcal{P}_r\Lambda^0$$

sind exakt.

Als weitere Folgerung erhält man dass man jedes homogene Polynom als direkte Summe eines Elements im Bild von κ und eines Elements im Bild von d schreiben kann:

Korollar 5.10.

$$\mathcal{H}_r\Lambda^k = \kappa\mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1} \oplus d\mathcal{H}_{r+1}\Lambda^{k-1}.$$

Beweis. Wegen der Homotopieformel gilt für jedes $\omega \in \mathcal{H}_r\Lambda^k$

$$\omega = \frac{1}{k+r} d\kappa\omega + \frac{1}{k+r} \kappa d\omega.$$

Da $\kappa\omega \in \mathcal{H}_{r+1}\Lambda^{k-1}$ und $d\omega \in \mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1}$ ist ω wie behauptet als Summe darstellbar.

Um zu zeigen dass diese Summe sogar direkt ist muss man zeigen dass der Schnitt von $d\mathcal{H}_{r+1}\Lambda^{k-1}$ und $\kappa\mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1}$ nur die Nullform enthält.

Sei ω ein Element dieses Schnittes.

Dann sind insbesondere $d\omega = 0$ und $\kappa\omega = 0$.

Wegen der Homotopieformel also auch

$$\omega = \frac{1}{k+r}(\kappa d + d\kappa)\omega = 0. \qquad \square$$

5.4 Die gestutzten ("trimmed") Polynomräume

Mit diesem Korollar kann man jetzt den Raum *aller* Polynome aufteilen:

$$\mathcal{P}_r\Lambda^k = \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k \oplus \mathcal{H}_r\Lambda^k = \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k \oplus \kappa\mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1} \oplus d\mathcal{H}_{r+1}\Lambda^{k-1}.$$

Wenn wir den letzten Summanden weglassen bekommen wir einen Raum zwischen $\mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k$ und $\mathcal{P}_r\Lambda^k$:

Definition 5.11 (Gestutzte Polynomformen)**.** *Der Raum der gestutzten ("trimmed") Polynomformen von Grad r ist*

$$\mathcal{P}_r^-\Lambda^k := \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k \oplus \kappa\mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1}.$$

Es gilt $\mathcal{P}_r^-\Lambda^0 = \mathcal{P}_r\Lambda^0$ und $\mathcal{P}_r^-\Lambda^n = \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^n$, aber für alle $0 < k < n$ ist $\mathcal{P}_r^-\Lambda^k$ echt zwischen $\mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k$ und $\mathcal{P}_r\Lambda^k$.

Die Dimension dieser Polynomräume ist

$$\dim \mathcal{P}_r^-\Lambda^k = \frac{r}{r+k} \dim \mathcal{P}_r\Lambda^k.$$

Beispiel 5.12 ($n = 3$, $k = 1$, $r = 1$ – Nédélec-Elemente erster Art)**.**

- $\mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k = \mathcal{P}_0\Lambda^1$ ist der Raum der konstanten Vektorfelder.
- $\mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1} = \mathcal{H}_0\Lambda^2$ ist ebenfalls der Raum der konstanten Vektorfelder.
- κ ist das Vektorprodukt mit x.

Also besteht $\mathcal{P}_1^-\Lambda^1$ aus allen Vektorfeldern (im Sinne von Vector Proxies) der Form

$$\alpha + \beta \times x, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3.$$

Das sind genau die Nédélec-Elemente erster Art (6 Dimensionen).

Beispiel 5.13 ($n = 3$, $k = 2$, $r = 1$ – Raviart-Thomas Elemente)**.**

- $\mathcal{P}_{r-1}\Lambda^k = \mathcal{P}_0\Lambda^2$ ist der Raum der konstanten Vektorfelder.
- $\mathcal{H}_{r-1}\Lambda^{k+1} = \mathcal{H}_0\Lambda^3$ ist der Raum der konstanten Funktionen.
- κ ist das Produkt eines Skalars mit x.

Also besteht $\mathcal{P}_1^-\Lambda^2$ aus allen Vektorfeldern (im Sinne von Vector Proxies) der Form

$$\alpha + bx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^3, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Das sind genau die Raviart–Thomas Elemente (4 Dimensionen).

Bemerkung 5.14. Der Fall $r = 1$ sie gerade die sogenannten *Whitney-Formen.* Diese wurden von Hassler Whitney schon 1957 eingeführt [2]. Die Dimension dieser Räume ist gerade

$$\dim \mathcal{P}_1^- \Lambda^k = \binom{n+1}{k+1}.$$

Es gibt also genau so viele Whitney-k-Formen wie ein n-Simplex k-Seiten hat.

Da

$$d\mathcal{P}_r^- \Lambda^k \subset d\mathcal{P}_r \Lambda^k \subset \mathcal{P}_{r-1}\Lambda^{k+1} \subset \mathcal{P}_r^- \Lambda^{k+1}$$

bilden die gestutzten Polynomen selbst wieder einen Komplex

$$\mathcal{P}_r^- \Lambda^0 \xrightarrow{d} \mathcal{P}_r^- \Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{P}_r^- \Lambda^n \xrightarrow{d} 0.$$

Anders als bisher bleibt hier der Polynomgrad konstant.

Lemma 5.15. *Der gestutzte Polynomkomplex ist exakt.*

5.5 Freiheitsgrade

Auf einem einzelnen Simplex T der Triangulierung haben wir jetzt zwei Komplexe von polynomiellen Differentialformen

$$\mathcal{P}_r \Lambda^0 \xrightarrow{d} \mathcal{P}_r \Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{P}_r \Lambda^n \xrightarrow{d} 0.$$

und

$$\mathcal{P}_r^- \Lambda^0 \xrightarrow{d} \mathcal{P}_r^- \Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{P}_r^- \Lambda^n \xrightarrow{d} 0.$$

Diese müssen wir jetzt noch zu stückweise polynomiellen Formen zusammenbauen.

Dafür braucht man *Freiheitsgrade.*

- Also lineare Funktionale auf dem Ansatzraum.

Zueinander gehörende Freiheitsgrade müssen an gemeinsamen Elementseiten zusammenpassen.

Es stellt sich heraus dass die vollen und die gestutzten Polynomräume zusammengehören, und zusammen behandelt werden sollten.

Etwas konkreter kommen die gestutzten Räume bei der Definition der Freiheitsgrade für die vollen Polynomräume vor, und umgekehrt.

Sei $\Delta_d(T)$ die Menge aller Seiten von T mit Dimension d.

1. Die Freiheitsgrade für ein $\omega \in \mathcal{P}_r \Lambda^k(T)$ sind

$$\omega \mapsto \int_f (\operatorname{tr}_f \omega) \wedge \mu \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}_{r+k-d}^- \Lambda^{d-k}(f) \qquad f \in \Delta_d(T), \quad d \geq k.$$

2. Die Freiheitsgrade für ein $\omega \in \mathcal{P}_r^- \Lambda^k(T)$ sind

$$\omega \mapsto \int_f (\operatorname{tr}_f \omega) \wedge \mu \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}_{r+k-d-1} \Lambda^{d-k}(f) \qquad f \in \Delta_d(T), \quad d \geq k.$$

Es ist also jeder Freiheitsgrad auf natürliche Art einer Simplex-Seite zugeordnet.

Bei den k-Whitney-Formen hat jede k-Seite genau einen Freiheitsgrad.

Beispiel 5.16 (Lagrange-Elemente)**.** Punktwerte an den Ecken

Beispiel 5.17 (Raviart-Thomas-Elemente)**.** Tangentialanteile auf den Flächen

Beispiel 5.18 (L^2-Elemente)**.** Integralmittel über das Element

Um sicher zu sein dass die Wahl der Freiheitsgrade sinnvoll ist muss man insbesondere Unisolvenz zeigen.

- Das bedeutet: Jeder Satz von Freiheitsgraden legt ein Element im Polynomraum eindeutig fest.

Lemma 5.19. *Die Freiheitsgrade für $\mathcal{P}_r\Lambda^k(T)$ und für $\mathcal{P}_r^-\Lambda^k(T)$ sind unisolvent.*

- Stetigkeit der Freiheitsgrade erzwingt genau die Art von Stetigkeit die man braucht damit die FE-Funktionen zu $H\Lambda^k$ gehören.

5.6 Kokettenprojektionen

Um die abstrakte Existenz- und Fehlertheorie aus Kapitel 4 anwenden zu können brauchen wir eine beschränkte Kokettenprojektion

$$\pi_h^j : L^2\Lambda^j \to V_h^j \qquad \text{für } j = k-1, k, k+1.$$

Die naheliegende Wahl sind die von den Freiheitsgraden erzeugten kanonischen Interpolationsoperatoren

$$\Pi_{r,h}^k : C\Lambda^k(\overline{\Omega}) \to \mathcal{P}_r\Lambda^k(\mathcal{T}_h).$$

(Ebenso für die gestutzten Räume).

Lemma 5.20. *Die kanonischen Interpolationsoperatoren bilden eine Kokettenabbildung, d.h., sie kommutieren mit der äußeren Ableitung.*

Dummerweise sind die kanonischen Interpolationsoperatoren im Allgemeinen *nicht* L^2-beschränkt.

Literatur

[1] D. N. Arnold. *Finite Element Exterior Calculus.* SIAM, 2018.

[2] H. Whitney. *Geometric Integration Theory.* Princeton University Press, 1957.