TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Physik am Samstag

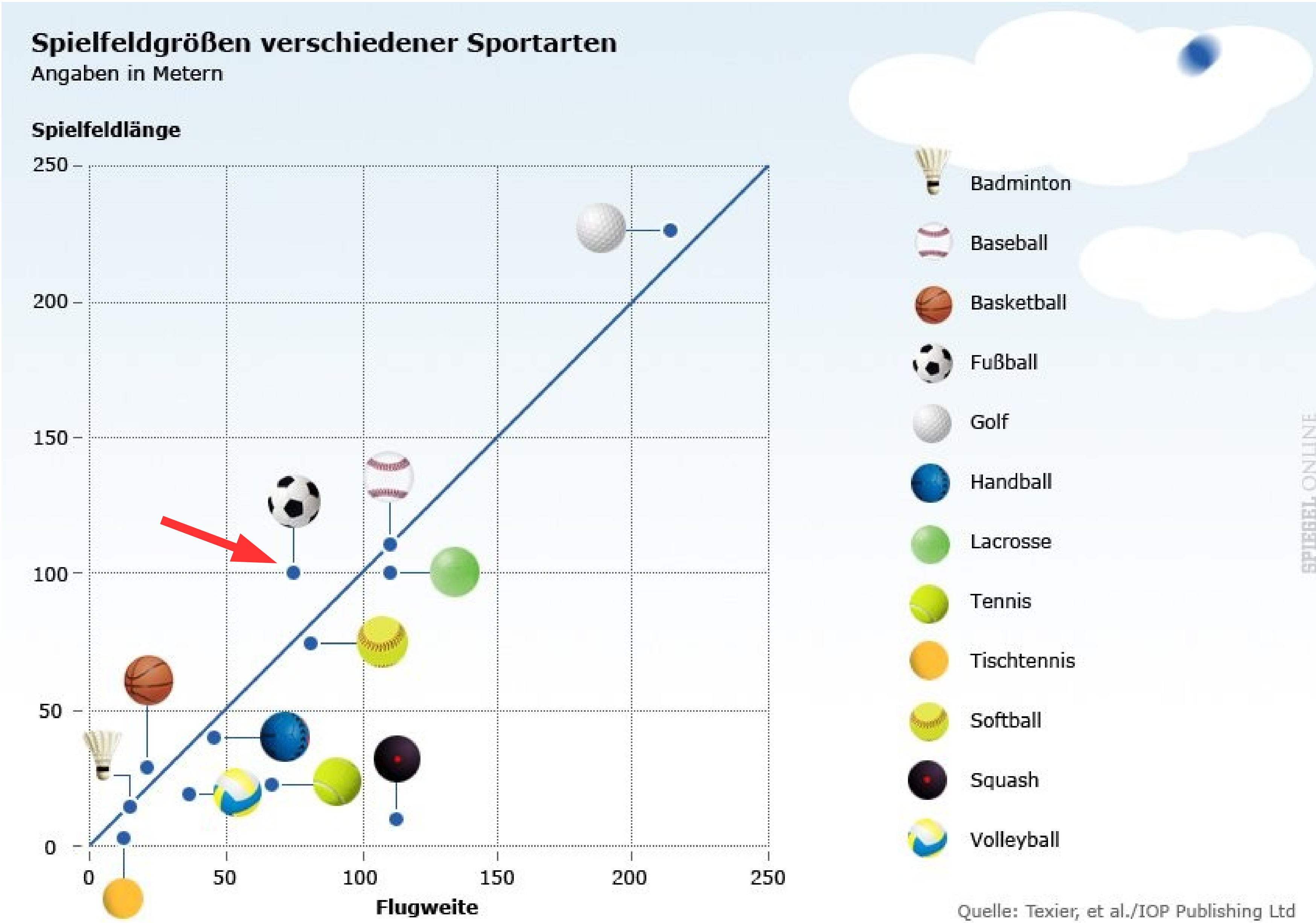
Physik des Fußballs

Anja Vest

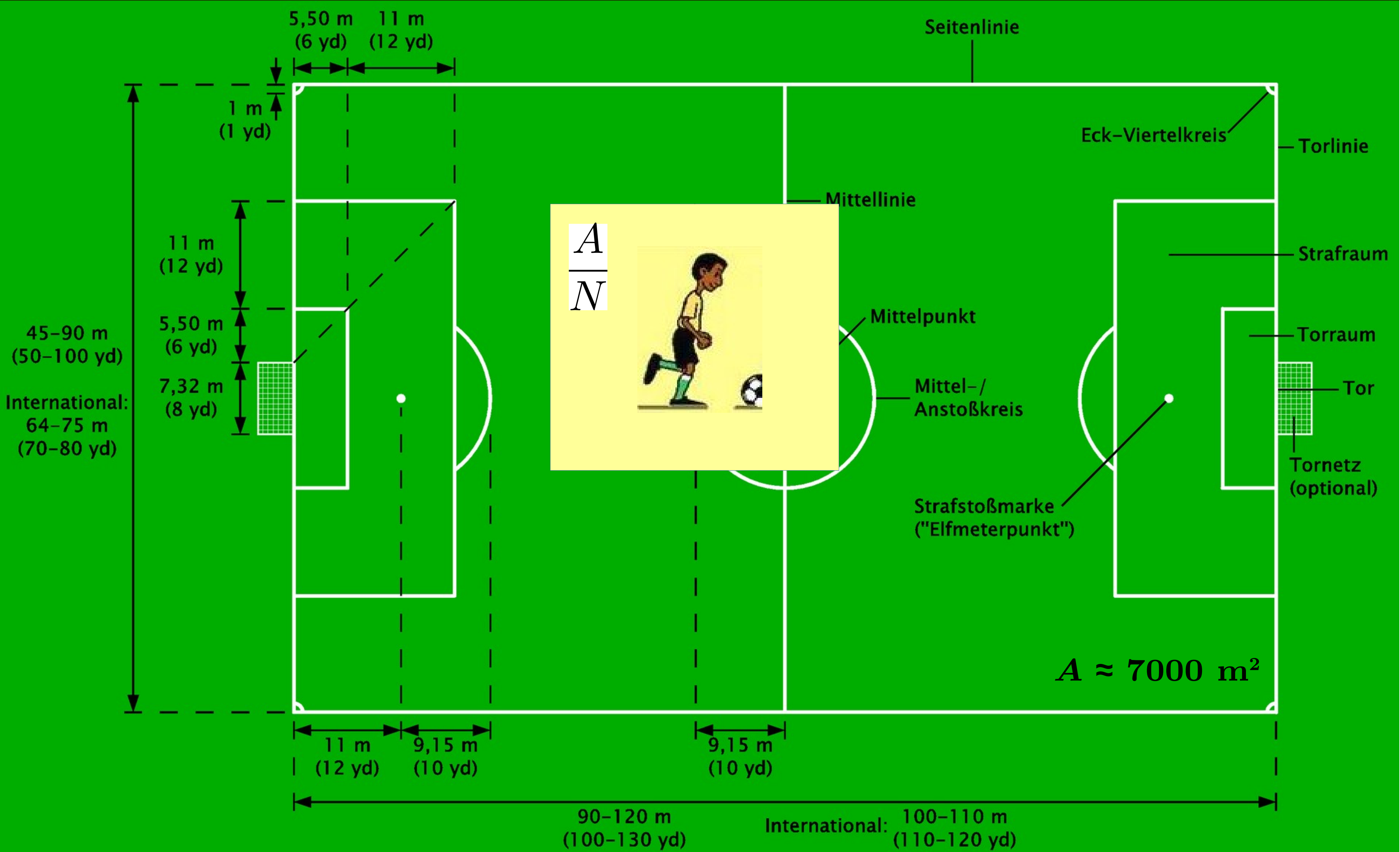
Institut für Kern- und Teilchenphysik

22. November 2014

Das Spielfeld



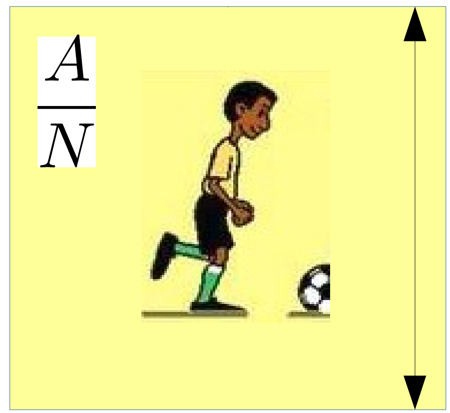
Das Spielfeld



Schwächung durch rote Karten

Naiv: ein Team wird durch eine Rote Karte um ~ 10% geschwächt

- Spielfläche $A = N(2R)^2$ $\quad N$: Anzahl der Feldpieler
- Von einem Spieler abgedeckte Fläche:



Kantenlänge $2R = \sqrt{\frac{A}{N}}$

- Zeit um jeden Punkt seiner Fläche zu erreichen: $T = \frac{1}{2v}\sqrt{\frac{A}{N}}$

  → Benötigte Geschwindigkeit:

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- **9 anstatt 10 Feldspieler** müssen jeweils um **~ 5%** schneller rennen, um das Spielfeld genauso wie vorher abzudecken!

Optimale Anzahl an Spielern

- Durchschnittliche Geschwindigkeit: $v_{\text{Spieler}} = 16\ \text{km/h}$
- Zeit, die ein Spieler zum Annehmen, Kontrollieren und Abspielen des Balles benötigt:

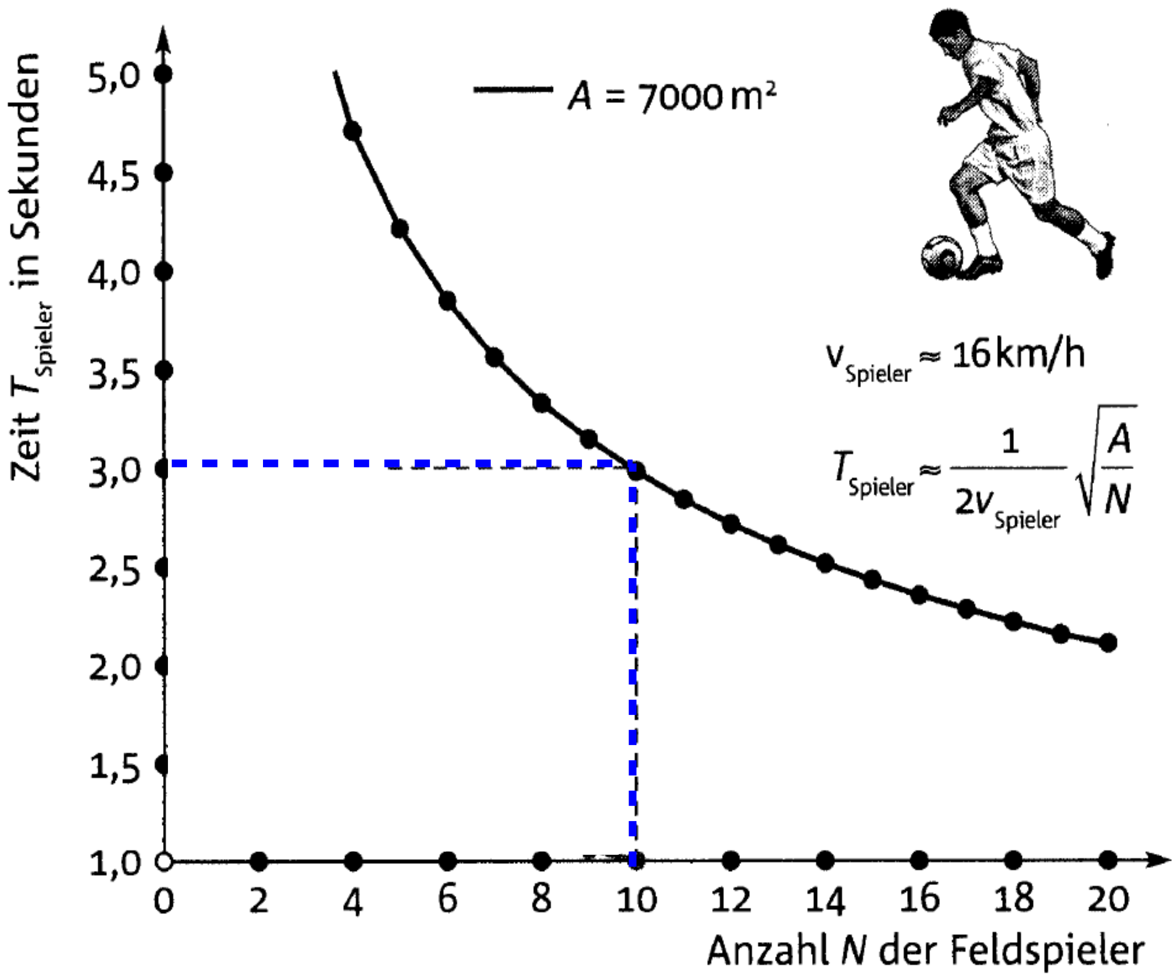
  $T_{\text{Kontrolle}} \approx 3\ \text{s}$

- Spiel interessant, wenn

  $T_{\text{Spieler(Gegner)}} \approx T_{\text{Kontrolle}}$

$$T_{\text{Spieler}} = \frac{1}{2v_{\text{Spieler}}}\sqrt{\frac{A}{N}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{A}{4T^2_{\text{Spieler}}v^2_{\text{Spieler}}}$$



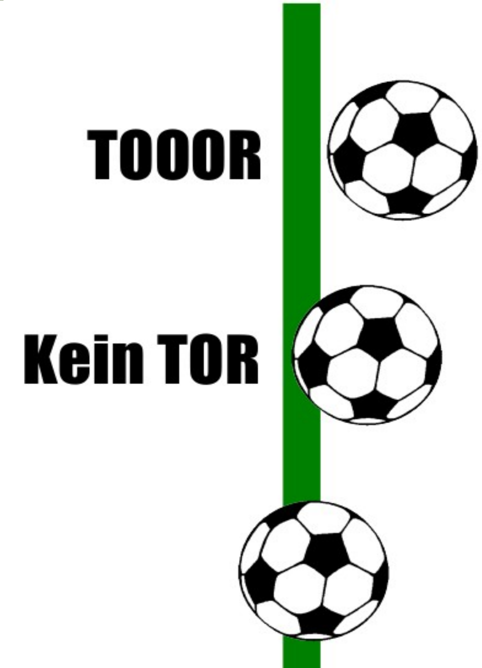
Der Ball

DFB-Regeln

- Kugelförmig
- Aus Leder oder anderem geeignetem Material
- Umfang: $68 - 70$ cm
  $\rightarrow d = 22$ cm
- Masse zu Spielbeginn: $410 - 450$ g
- Überdruck: $0.6 - 1.1$ bar
  $\rightarrow 0.8$ bar

“Tor” oder “kein Tor”

- **Definition**: Tor (bzw. Aus), wenn Ball mit vollem Umfang hinter der Linie
- Situation häufig schon im Standbild streitig
- Wie lange hat ein Schiedsrichter Zeit den Ball hinter der Linie zu erkennen?



Dauer des Bodenkontakts

- Ball *verformt* sich
- Auf den Ball wirkende Kraft:

$$F(t) = p \cdot {\color{red}A} = m \cdot a = m\frac{v_0}{t} = m\frac{2v_0}{T_\mathrm{B}}$$

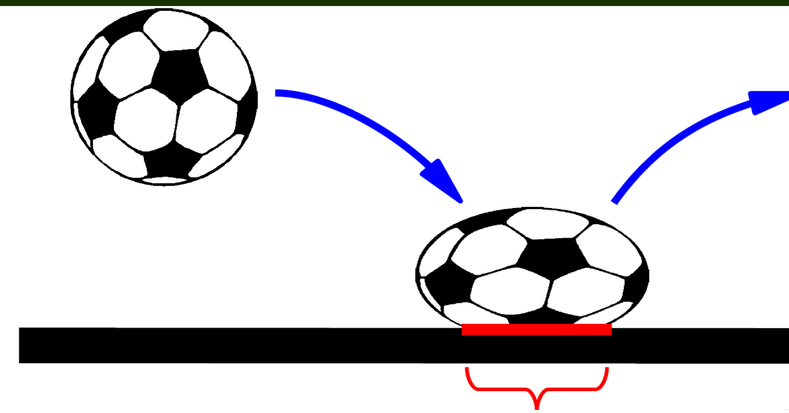
- Zeit des Bodenkontakts vollständig durch Ballparameter gegeben:

$$\Rightarrow {\color{blue} T_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{8m}{p\pi d}} \approx 0.008\ \mathrm{s}}$$

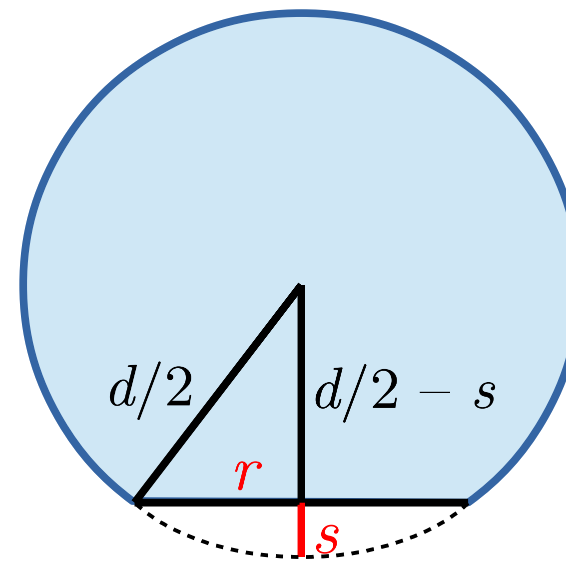
$$(m = 450\ \mathrm{g},\ p = 0.8\ \mathrm{bar},\ d = 22\ \mathrm{cm})$$

→ Ball berührt $\sim 1/100\ \mathrm{s}$ den Boden !

- **Bodenkontakt deutlich kürzer als Wahrnehmungszeit !**



Kontaktfläche: $A = \pi r^2$



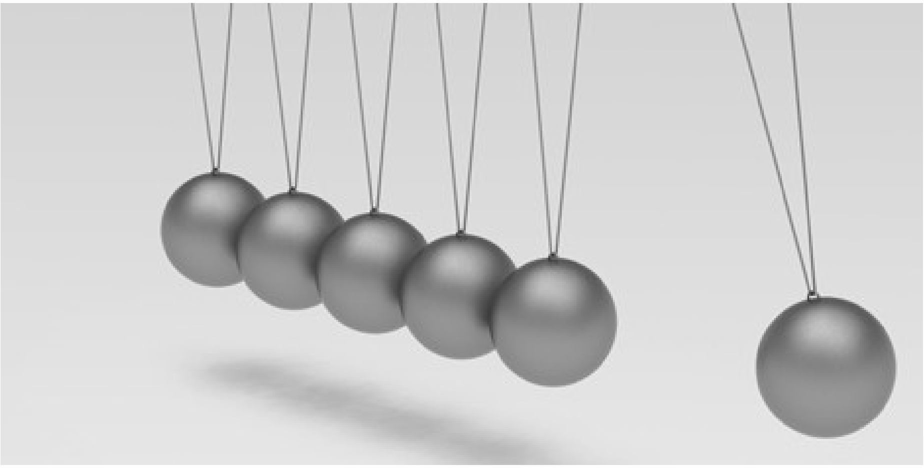
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(d/2)^2 - (d/2 - s)^2} \\ &\approx \sqrt{d \cdot s} \quad \text{wenn} \quad s \ll d \end{aligned}$$

Energie- und Impulserhaltung

- Potentielle Energie: $E_{\text{Pot}} = mgh$

$$g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Kinetische Energie: $E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2}mv^2$



- Impuls: $p = mv$

- Flacher Schuss, **Annahme**: elastischer Stoß
  - Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_F v_F^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_F v_F'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2$
  - Impulserhaltung: $m_F v_F + m_B v_B = m_F v_F' + m_B v_B'$

F = Fuß

B = Ball

Experiment

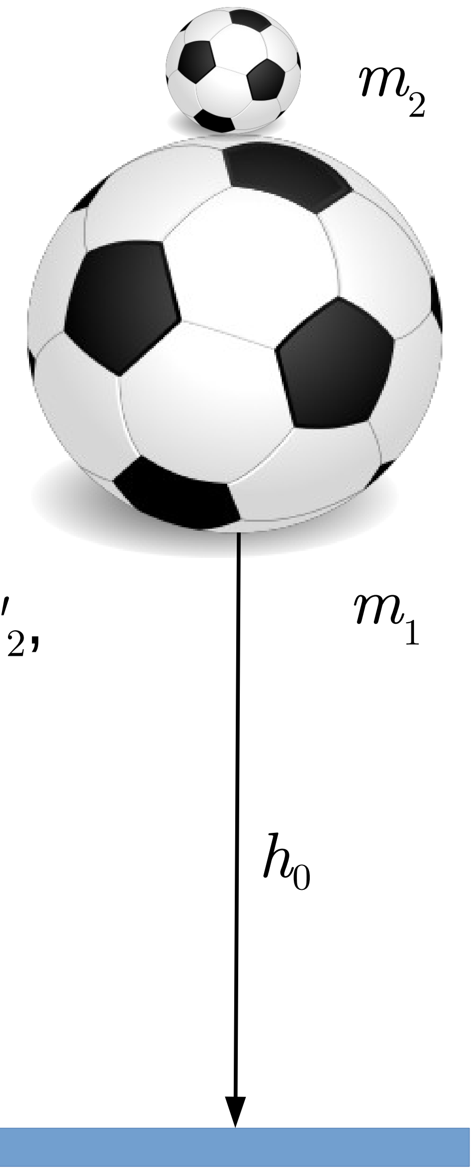
- Großer Ball (1) und kleiner Ball (2): $m_1 > m_2$
- Beide Fallhöhen sind ungefähr h_0

$$v_2' = \frac{m_1(\epsilon^2 + 2\epsilon) - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad \text{mit} \quad \epsilon = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

- Je kleiner m_2 ist im Verhältnis zu m_1,
  um so größer wird die Rückprallgeschwindigkeit v'_2,
  d.h. um so höher springt auch Ball 2

$$\frac{h_2}{h_0} = \left(\frac{v_2'}{v_0}\right)^2$$

- Maximal: $h_2 = 9h_0$



Wie schnell fliegt ein Fußball?

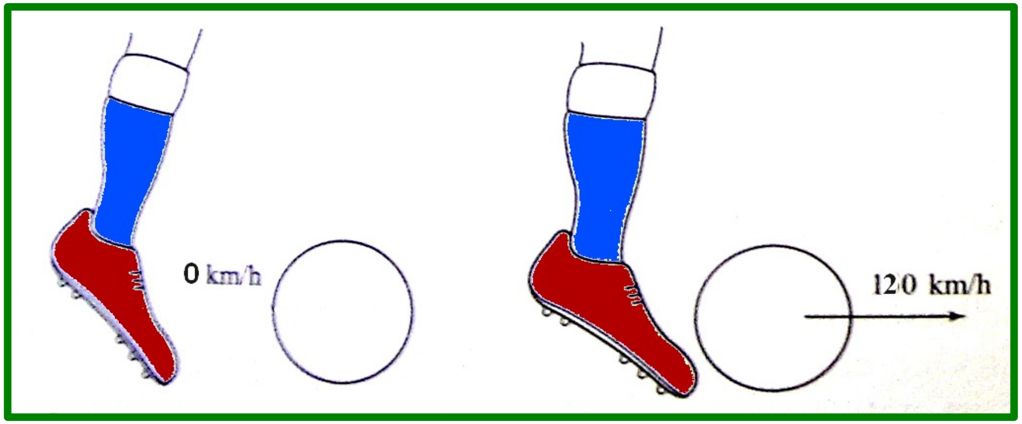
- **Elfmeter:** vor dem Schuss ruht der Ball
- Geschwindigkeit des Balles nach dem Schuss:

$$v'_B = \frac{2v_F}{1 + \frac{m_B}{m_F}} \lessapprox 2v_F$$

- Annahme: Fuß bewegt sich mit doppelter Anlaufgeschwindigkeit

  → **Faustformel:** $v'_B \approx 4 \cdot v_{\text{Anlauf}}$

- Beispiel: Anlauf mit $\sim 30\ \mathrm{km/h}$ → Ballgeschwindigkeit: $120\ \mathrm{km/h}$

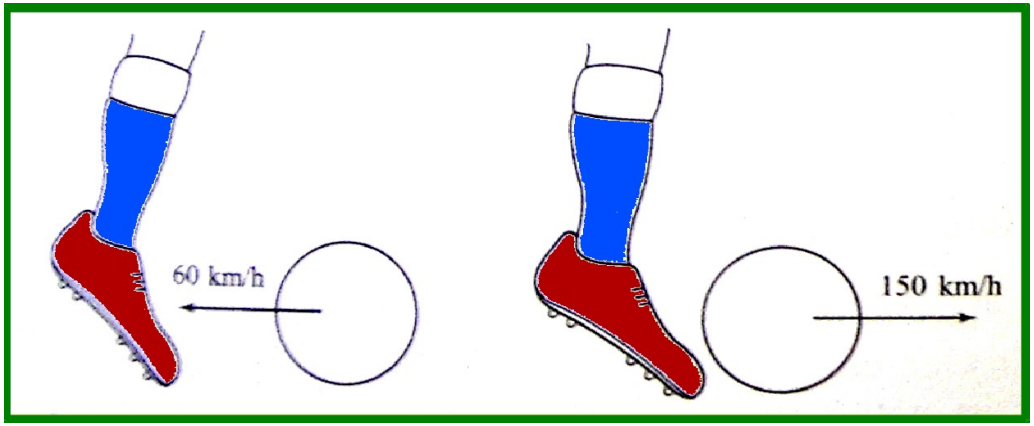


Wie schnell fliegt ein Fußball?

- **Volleyschuß / Dropkick**: Ball bewegt sich auf Fuß zu
- Ungefähr die Hälfte der Geschwindigkeit des Balles wird in den Schuss übertragen
- Beispiel: Ball trifft mit $60\ \mathrm{km/h}$ auf den Fuß

  → Wenn der vor dem Schuss ruhende Ball $120\ \mathrm{km/h}$ erreicht (siehe Elfmeter), hat er jetzt eine Geschwindigkeit

$$v'_B \approx (120 + 0.5 \cdot 60)\ \mathrm{km/h} = 150\ \mathrm{km/h}$$



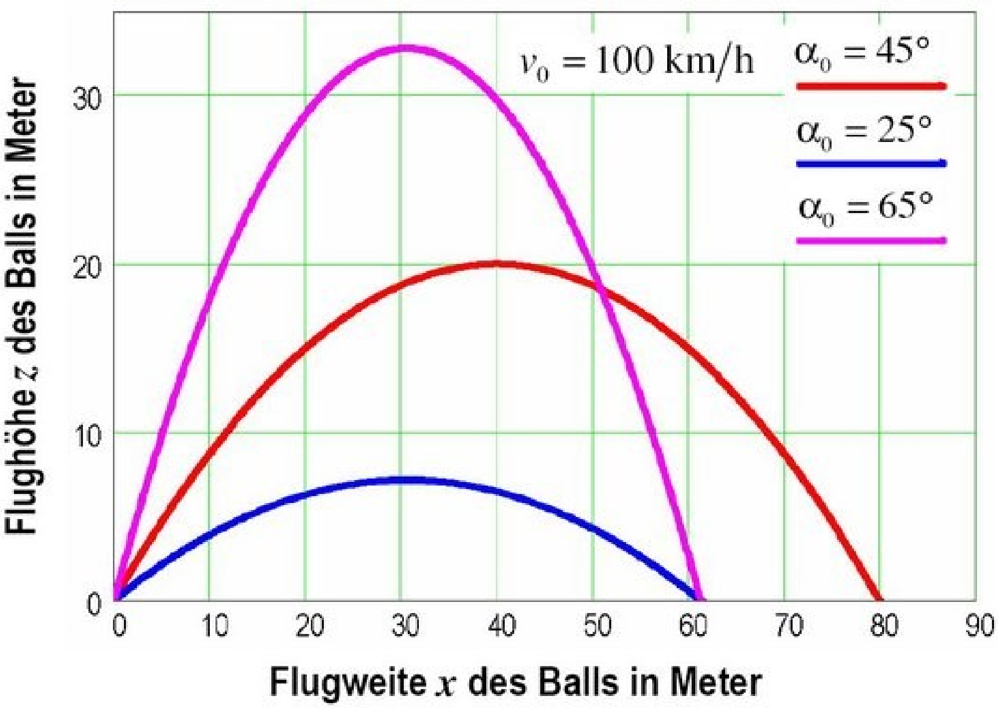
Die Wurfparabel

- Bewewgungsgleichung:

$$x(t) = v_{x,0} \cdot t$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z,0} \cdot t$$

$$z(x) = x \tan \alpha_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

Wurfparabeln für unterschiedliche Abschusswinkel



→ Optimaler Abschusswinkel:

$$\alpha_0 = 45°$$

- für $\alpha_0 = 25°$ $(45°-20°)$ und für $\alpha_0 = 65°$ $(45°+20°)$ sind die Schussweiten gleich groß

Luftreibung

Auf Ball wirkt abbremsende Kraft entgegen der Bewegungsrichtung

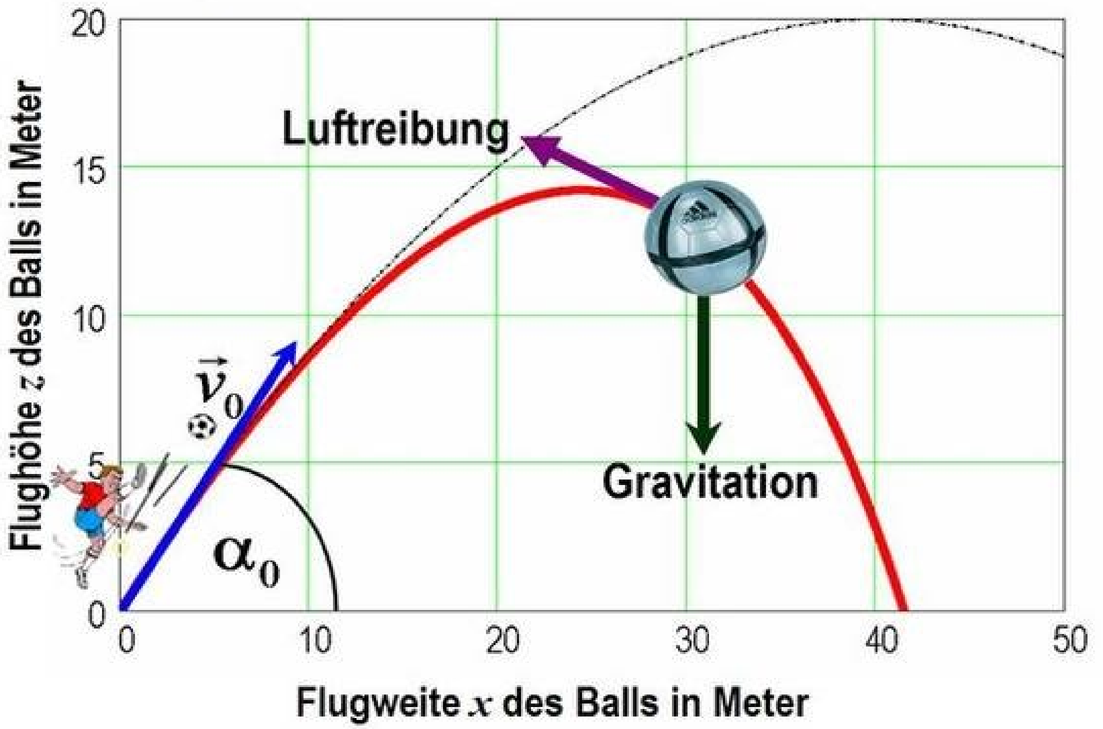
- Reibungskraft abhängig von Geschwindigkeit:

$$F_{\text{Reibung}} = -\beta\ v$$

Stokessche Reibung, Reibungsparameter β

- Fußball: $\beta\ = 0.142\ \text{kg/s}$

Flugbahn eines Fußballs mit Luftwiderstand



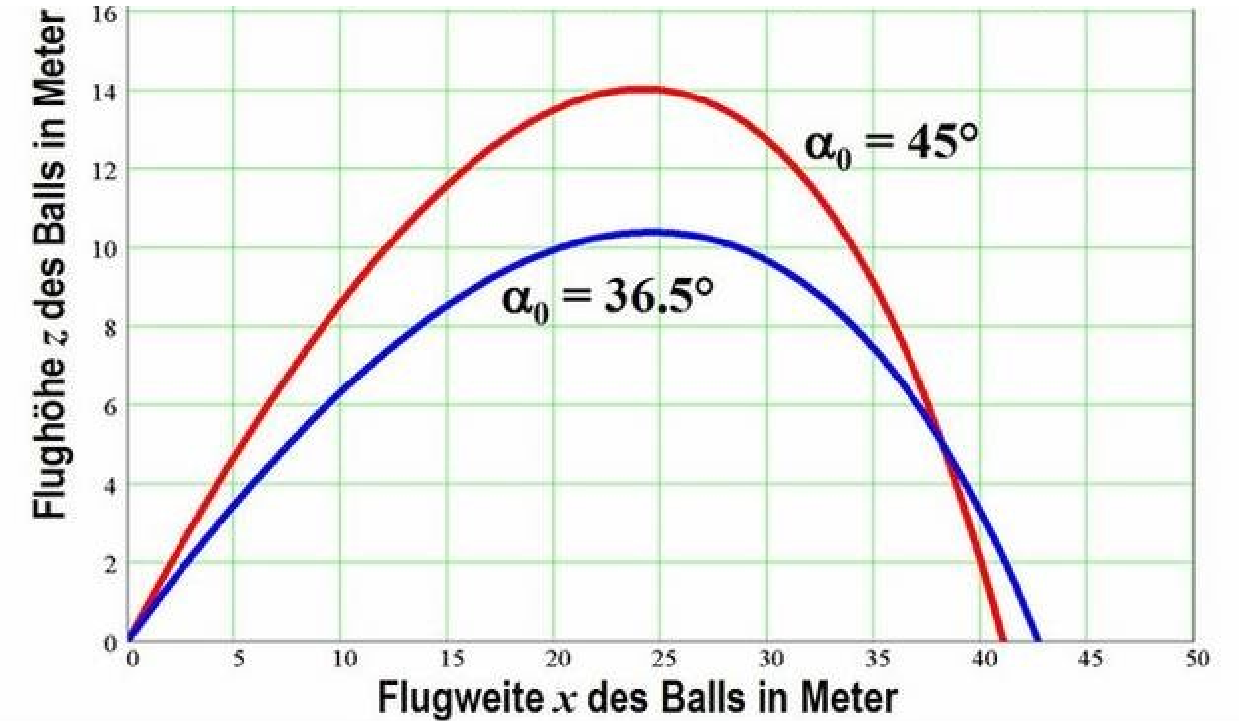
Ballistik bei Luftwiderstand

Flugkurve eines Balles bei Stokesscher Reibung:

$$z(x) = x(\tan\alpha_0 + \frac{mg}{\beta v_0 \cos\alpha_0}) + \frac{m^2 g}{\beta^2} \ln(1 - \frac{\beta}{m}\frac{x}{v_0\cos\alpha_0})$$

→ Deutliche Abweichung von Wurfparabel !

→ **Optimaler Abschusswinkel kleiner**



- $m = 450$ g
- $v_0 = 100$ km/h
- $\beta = 0.142$ kg/s

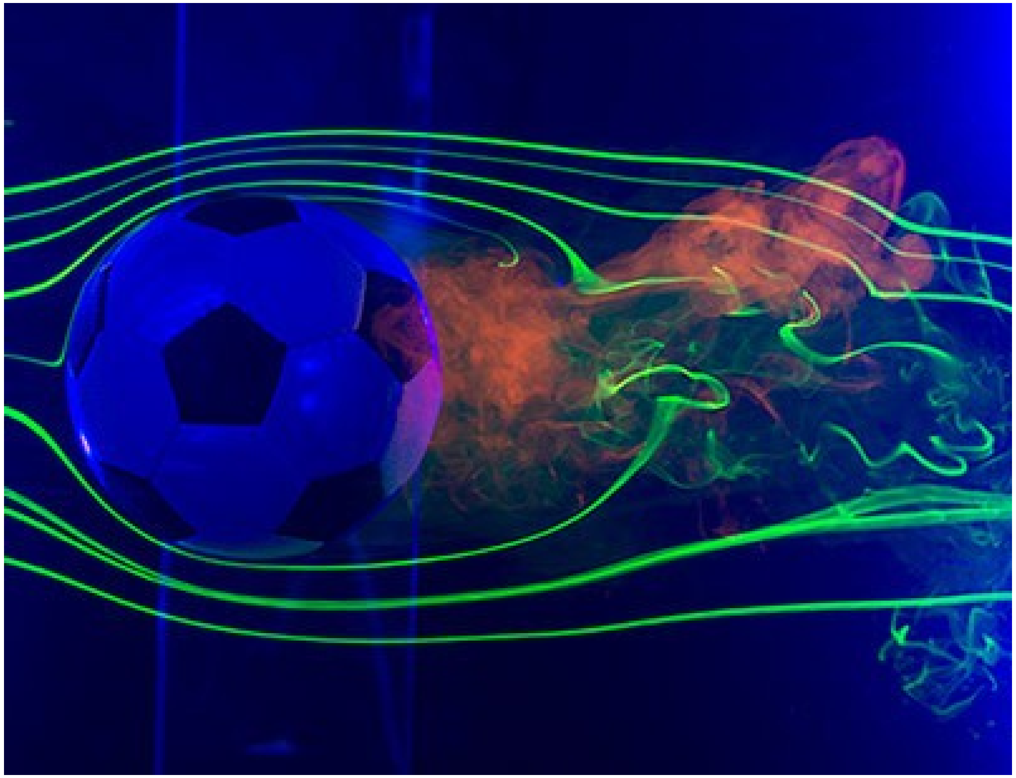
→ $\boldsymbol{\alpha_0 = 36.5°}$

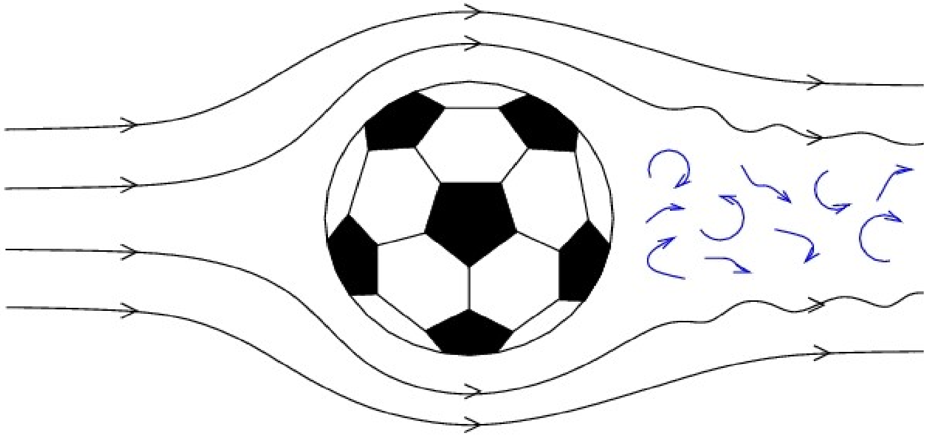
Aber:
Stokessche Reibung
gilt nur für laminare
(wirbelfreie) Strömungen

Strömungswiderstand

- Aufgrund der Viskosität von Luft löst sich Strömung von Ball ab
- Ablösen einzelner Luftwirbel in der “Grenzschicht” (bis wenige mm)

  → hinter dem Ball entstehen sog. „Wirbelschleppen“, die ihm Energie entziehen und abbremsen

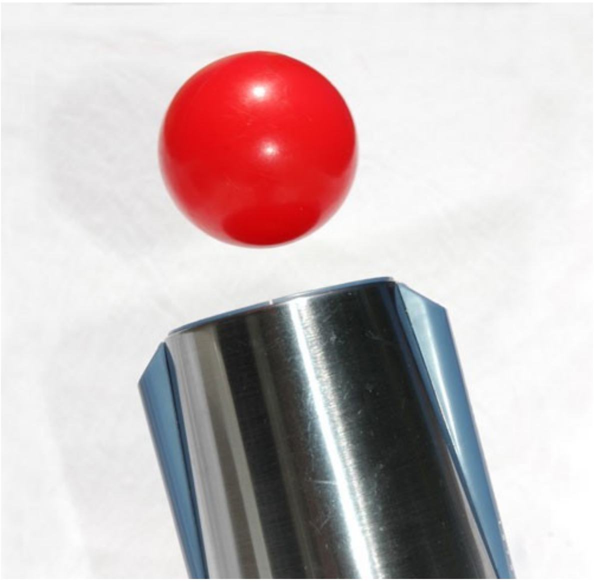


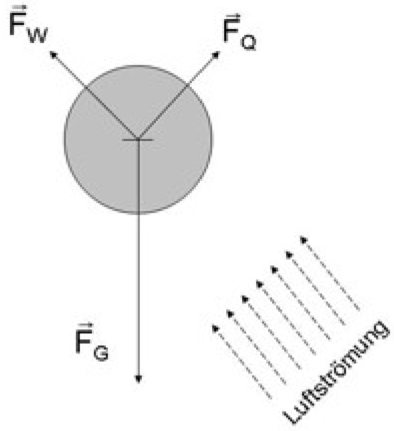


Luftwiderstand steigt quadratisch mit Geschwindigkeit an

Experiment

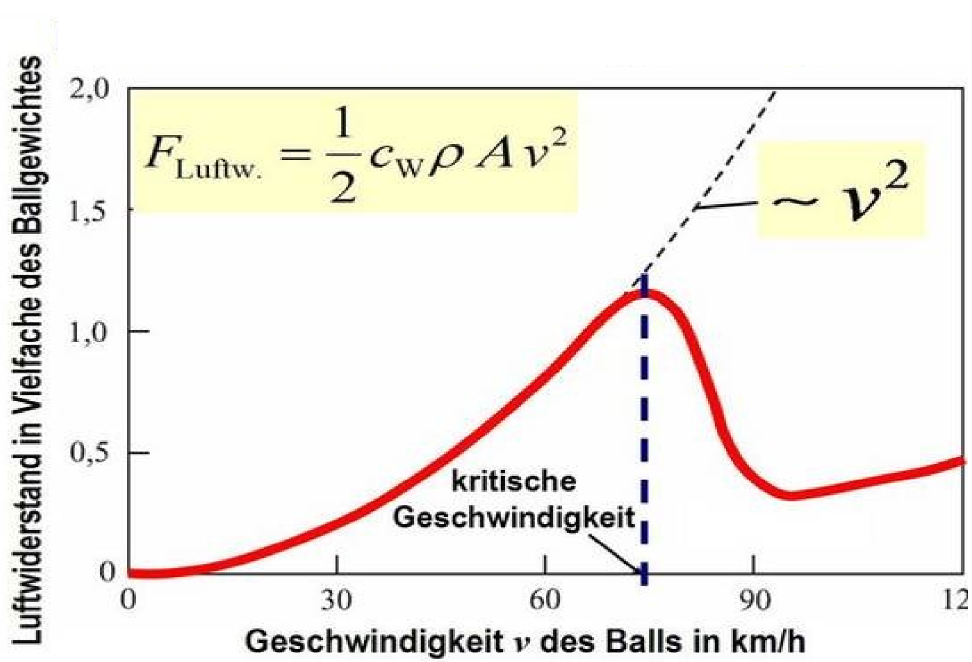
- Bernoulli-Gleichung: $$\frac{1}{2}\rho v^2 + \mathrm{p} = \mathrm{const}$$



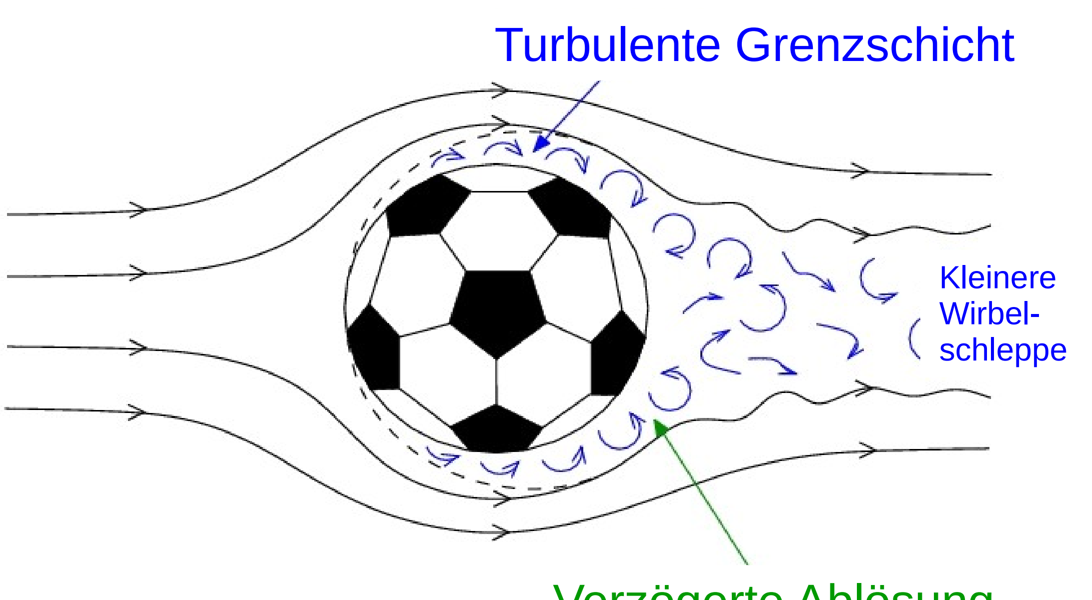


Turbulente Strömung

- Beobachtung:
  bei hohen Geschwindgkeiten fällt Luftwiderstand plötzlich ab
- Grund: kleine Wirbel in Grenzschicht verursachen späteres Ablösen → **kleinere Wirbelschleppe**
- Effekt besonders ausgeprägt bei perfekter glatter Kugel



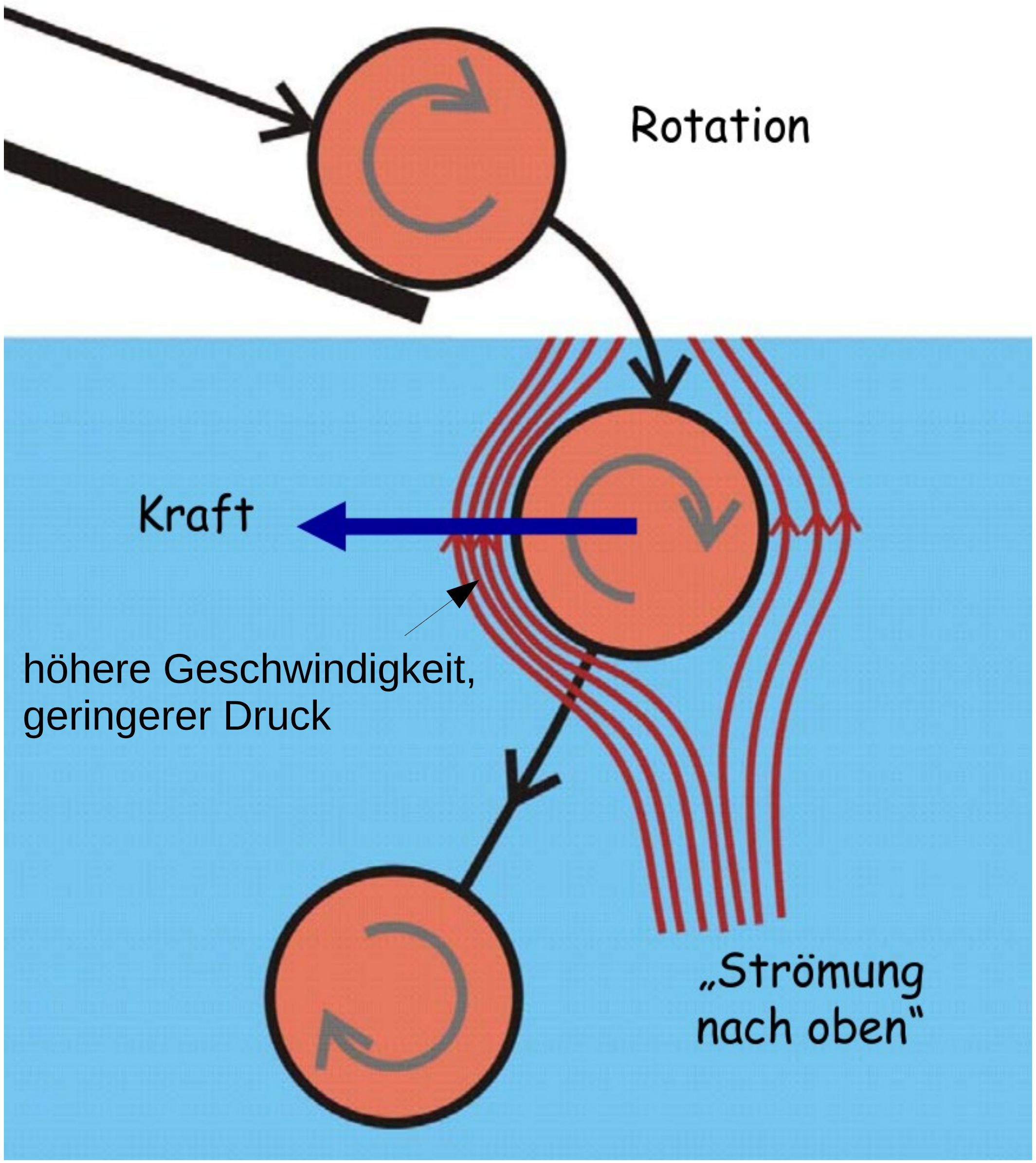
Bei kritischer Geschwindigkeit:



Experiment

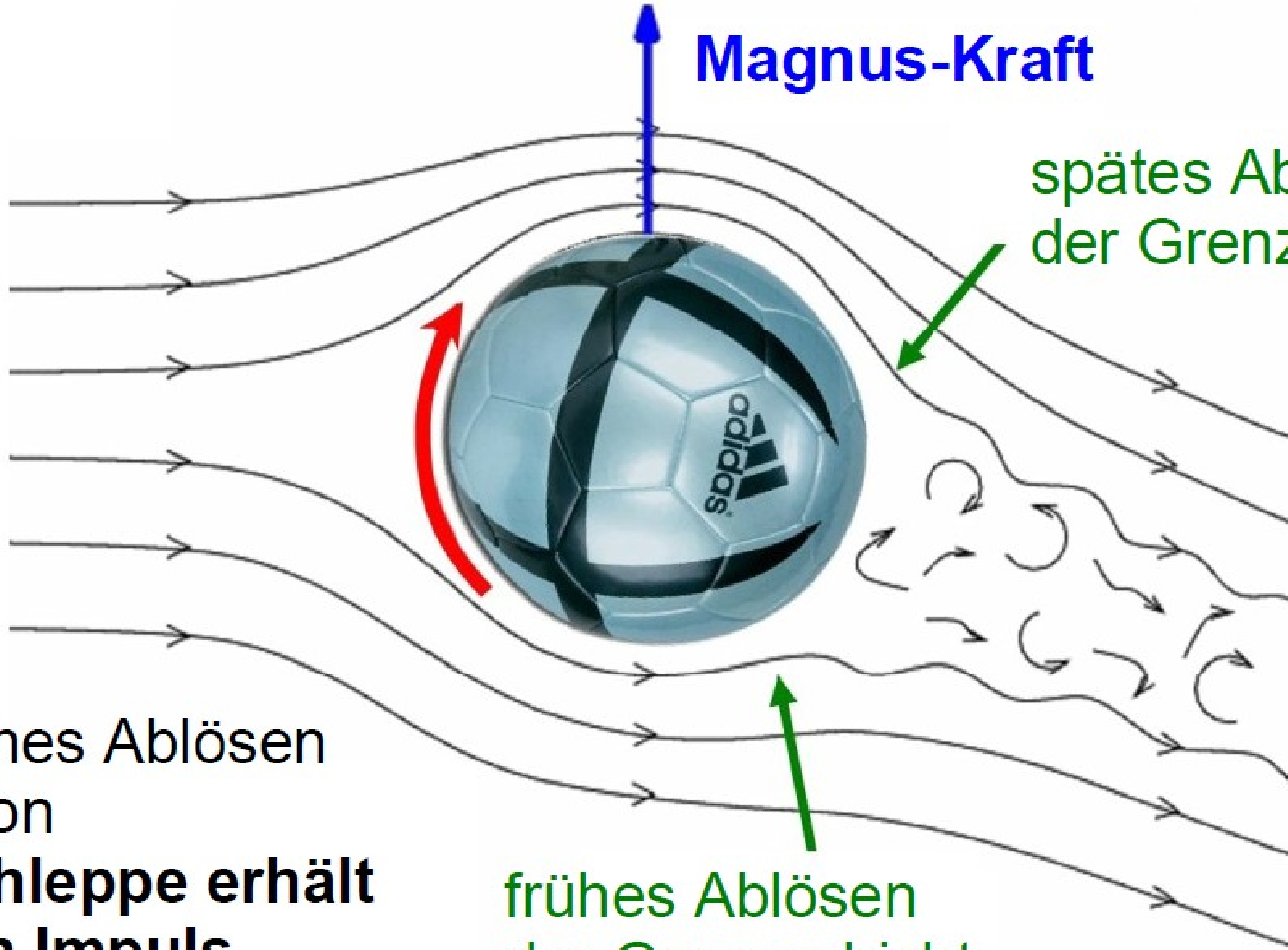
- Magnuseffekt im Wasser
- Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \mathrm{p} = \mathrm{const}$$



Die “Bananenflanke”

$v < v_{\text{kritisch}}$

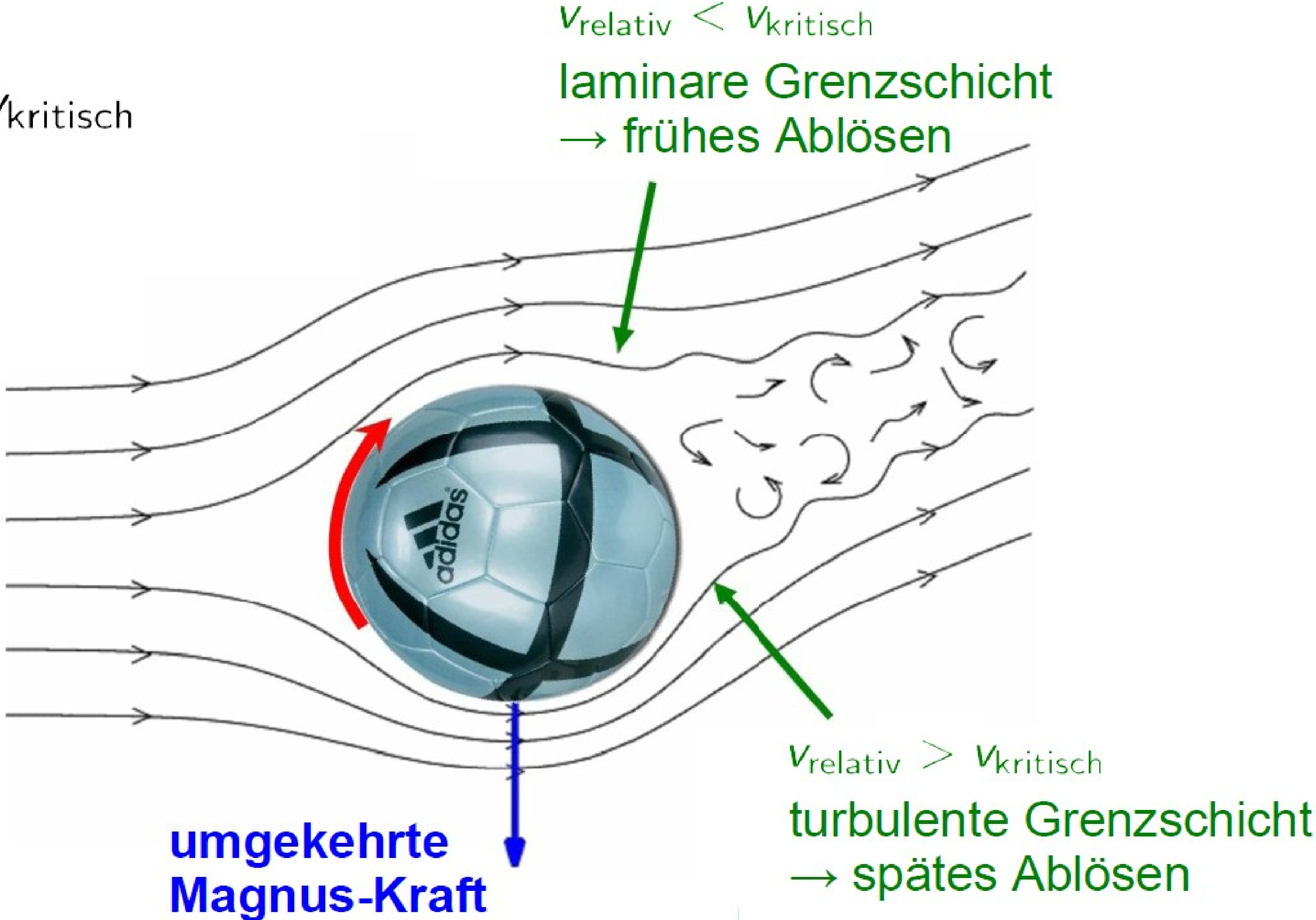


Assymetrisches Ablösen durch Rotation
→ **Wirbelschleppe erhält senkrechten Impuls**

Rotierende Bälle erfahren Ablenkung senkrecht zur Flugrichtung aufgrund von Magnus-Kraft

Umgekehrte Magnus-Kraft

$v \sim v_{\mathrm{kritisch}}$

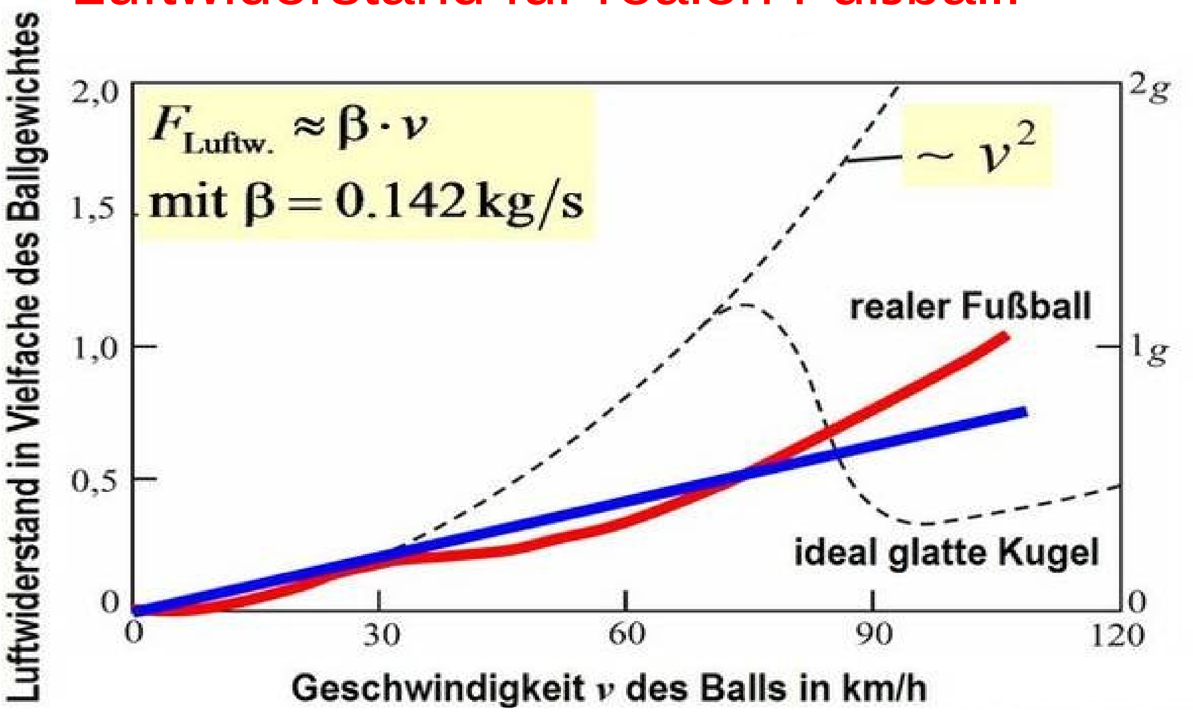


Der “Flatterball”

- Wirkt zuerst die umgekehrte und danach die normale Magnus-Kraft, kann ein Ball „flattern”

- **Aber:** *Reale* Fußbälle haben **keine** kritische Geschwindigkeit aufgrund ihrer Oberflächenstruktur (Nähte, Rillen, Noppen)

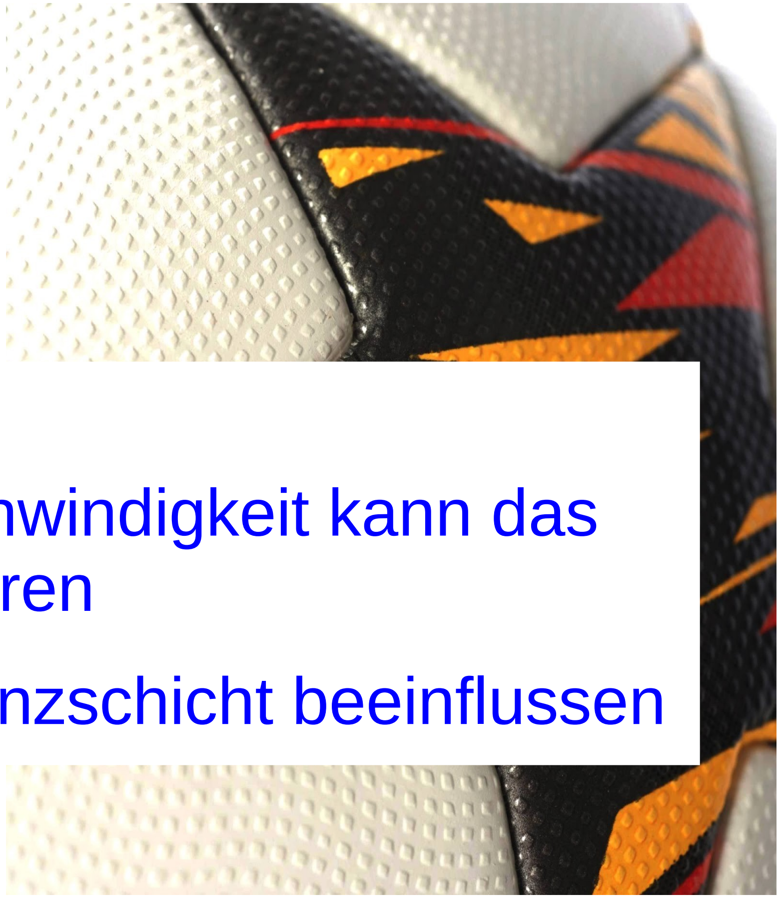
Luftwiderstand für realen Fußball:



Der “Flatterball”

- Wirkt zuerst die umgekehrte und danach die normale Magnus-Kraft, kann ein Ball „flattern”

- **Aber:** *Reale* Fußbälle haben **keine** kritische Geschwindigkeit aufgrund ihrer Oberflächenstruktur (Nähte, Rillen, Noppen)



→ **Es gibt keine Flatterbälle !?**

Doch, denn:

- Bei kleiner (oder keiner) Rotationsgeschwindigkeit kann das Ablösen der Grenzschicht zufällig variieren

- Windböen können das Ablösen der Grenzschicht beeinflussen

Die “Bananenflanke”

Der optimale Treffpunkt für eine Bananenflanke:

- Magnus-Kraft:

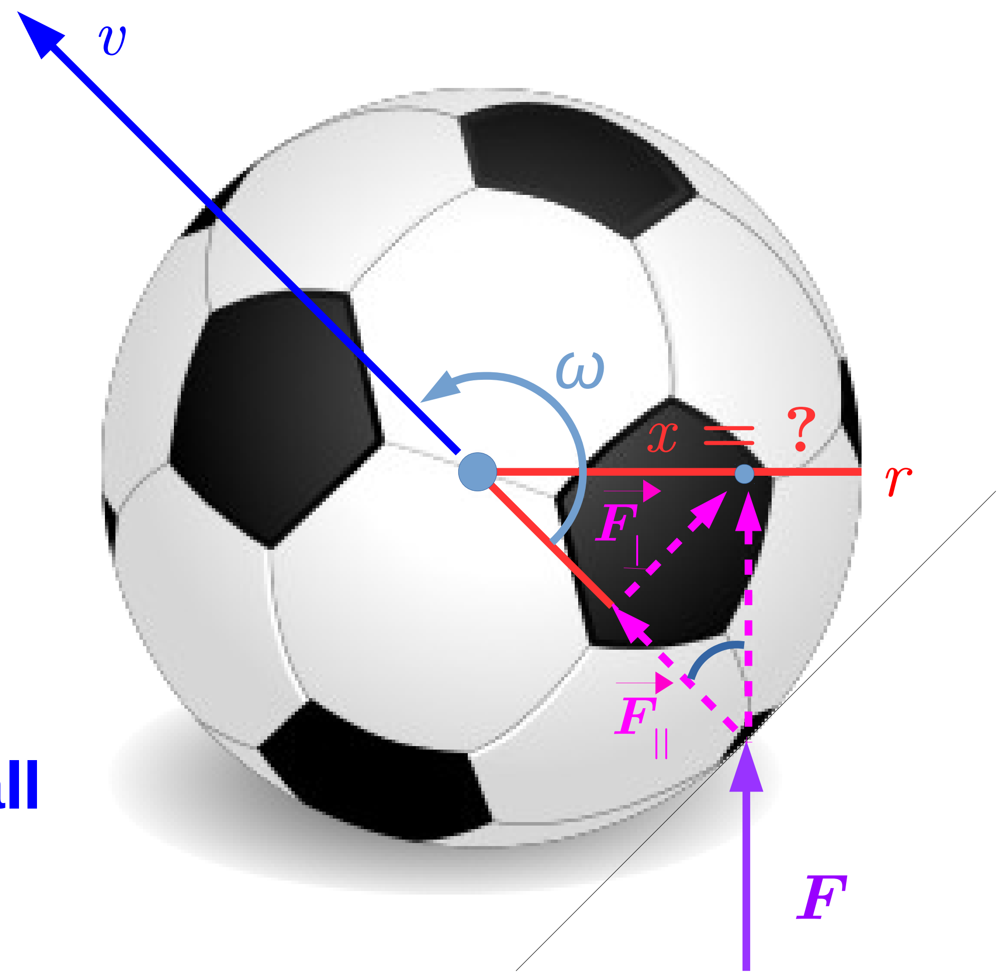
$$F_{\text{Magnus}} = \text{const.} \cdot x\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}$$

- Für

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot r$$

wird F_{Magnus} maximal

→ **Der Schütze muss den Ball ca. 70% vom Mittelpunkt entfernt treffen**



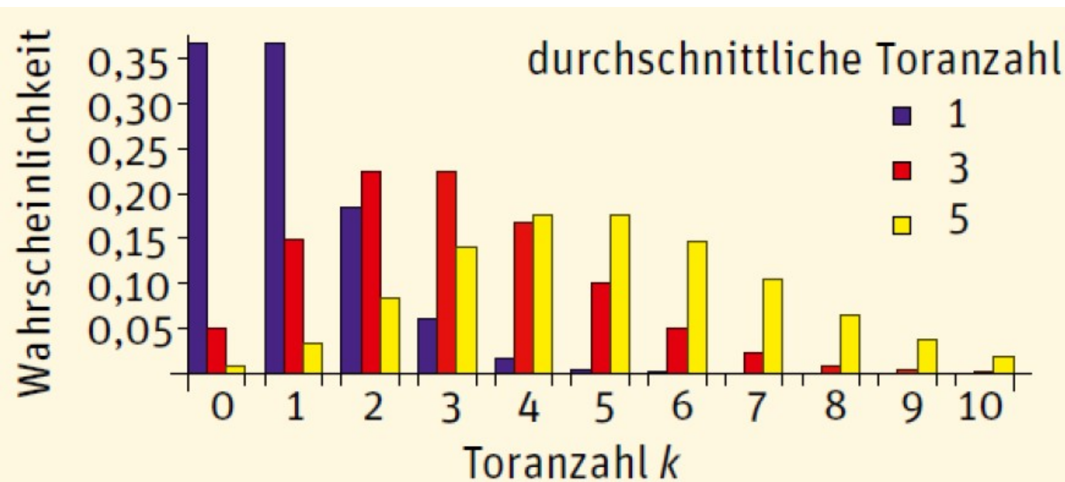
Zufall im Fußball

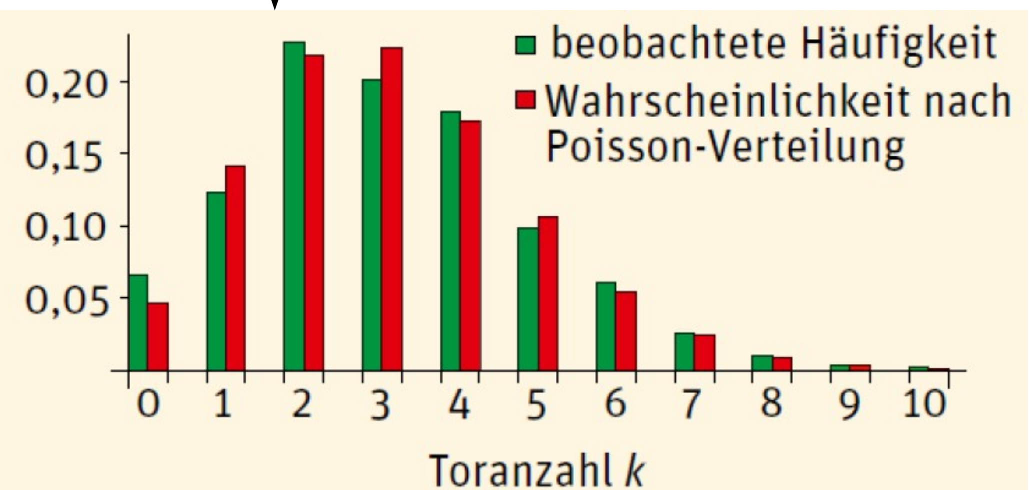
- **Annahmen:**
  - Alle Manschaften sind gleich stark
  - Tore fallen unkorreliert
  - Durchschnittliche Anzahl der Tore unabhängig von Paarung

→ **Anzahl der gefallenen Tore folgt Poisson-Verteilung**

$$p_a(k) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}$$

In der Fußball-Bundesliga fallen im Durchschnitt 3 Tore





Zufall im Fußball

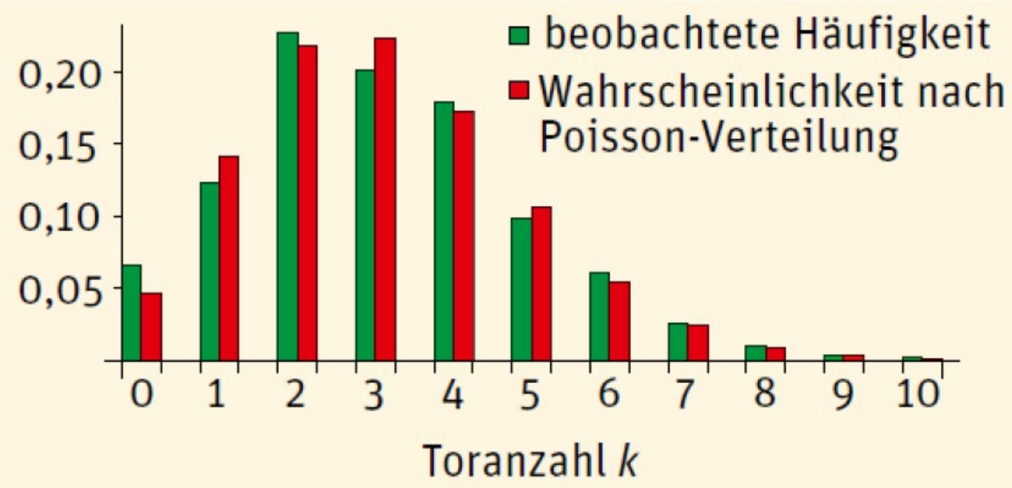
- **Annahmen:**
  - Alle Manschaften sind gleich stark
  - Tore fallen unkorreliert
  - Durchschnittliche Anzahl der Tore unabhängig von Paarung

→ **Anzahl der gefallenen Tore folgt Poisson-Verteilung**

$$p_a(k) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a} \quad \text{mit} \quad a = 3$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit, dass in einem Spiel 9 Tore fallen:

$$p_3(9) = \frac{3^9}{9!} \cdot e^{-3} = 0.0027$$



Spannung im Fußball

- Beispiel: Team A/B schießt nächstes Tor: $p_A = 2/3$ und $p_B = 1/3$
  - Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel $T_A{:}T_B$ endet: $W = p_A^{T_A} \cdot p_B^{T_B}$
    z.B. Spielausgang 2:0 $\rightarrow$ $W = (2/3)^2 \cdot (1/3)^0 \approx 45\%$
  - Wahrscheinlichkeit für Sieg, Unentschieden oder Niederlage:

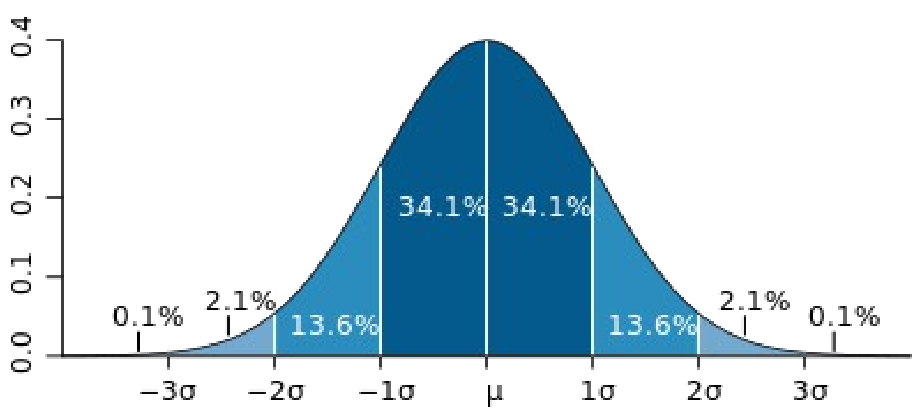
Anzahl Tore	Sieg Team A	Unentschieden	Sieg Team B
0	0 %	100 %	0 %
1	67 %	0 %	33 %
2	45 %	44 %	11 %
3	74 %	0 %	26 %
4	59 %	30 %	11 %
...	...	...	...
10	78.7 %	13.7 %	7.7 %

- Je weniger Tore fallen, desto wahrscheinlicher sind Überraschungen

Zufallstabelle

- Gleichstarke Mannschaften (~ 3 Tore/Spiel) → 1.375 Punkte/Spiel
- Mittlere erwartete Punktzahl/Saison: 34 x 1.375 = 46.75 Punkte
- Typische Punktzahl:
  - Tabellenerster: 62-63
  - Tabellenletzer: 30-31
- Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{34} \cdot 1.32 = 7.7 \text{ Punkte}$$



Eine simulierte »Zufallstabelle« für eine Bundesliga-Saison

Platz	*S*	*G*	*U*	*V*	*Punkte*
1	34	18	10	6	64
2	34	14	13	7	55
3	34	16	5	13	53
4	34	14	10	10	52
5	34	15	7	12	52
6	34	14	8	12	50
7	34	13	11	10	50
8	34	12	11	11	47
9	34	12	10	12	46
10	34	12	10	12	46
11	34	12	8	14	44
12	34	11	10	13	43
13	34	11	8	15	41
14	34	11	8	15	41
15	34	10	8	16	38
16	34	7	17	10	38
17	34	9	11	14	38
18	34	9	7	18	34

Alles Zufall?

- Beispiel Bayern München: 90 Punkte in der BL Saison 13/14

  $\rightarrow 5.6\ \sigma$

- 90 Punkte nur in $< 0.000\ 01\ \%$ der simulierten Tabellen

Nicht alle Teams sind gleich stark !

Zufall kann große Rolle spielen !

Abschlusstabelle der Bundesliga-Saison 2013/2014								
1.	FC Bayern München (M, P)	34	29	3	2	94:23	+71	90
2.	Borussia Dortmund	34	22	5	7	80:38	+42	71
3.	FC Schalke 04	34	19	7	8	63:43	+20	64
4.	Bayer 04 Leverkusen	34	19	4	11	60:41	+19	61
5.	VfL Wolfsburg	34	18	6	10	63:50	+13	60
6.	Borussia Mönchengladbach	34	16	7	11	59:43	+16	55
7.	1. FSV Mainz 05	34	16	5	13	52:54	−2	53
8.	FC Augsburg	34	15	7	12	47:47	±0	52
9.	TSG 1899 Hoffenheim (R)	34	11	11	12	72:70	+2	44
10.	Hannover 96	34	12	6	16	46:59	−13	42
11.	Hertha BSC (N)	34	11	8	15	40:48	−8	41
12.	Werder Bremen	34	10	9	15	42:66	−24	39
13.	Eintracht Frankfurt	34	9	9	16	40:57	−17	36
14.	SC Freiburg	34	9	9	16	43:61	−18	36
15.	VfB Stuttgart	34	8	8	18	49:62	−13	32
16.	Hamburger SV	34	7	6	21	51:75	−24	27
17.	1. FC Nürnberg	34	5	11	18	37:70	−33	26
18.	Eintracht Braunschweig (N)	34	6	7	21	29:60	−31	25

Quellenangaben

- Manchmal gewinnt der Bessere – Die Physik des Fußballspiels, Metin Tolan, Piper 2011
- Fußball – Physik mit Kick, John Wesson, Spektrum 2006
- Ist Fußball ein Glückspiel? Holger Dambeck, Spektrum der Wissenschaft 06/10
- www.weltderphysik.de