



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN



DR. HANS RIEGEL-STIFTUNG

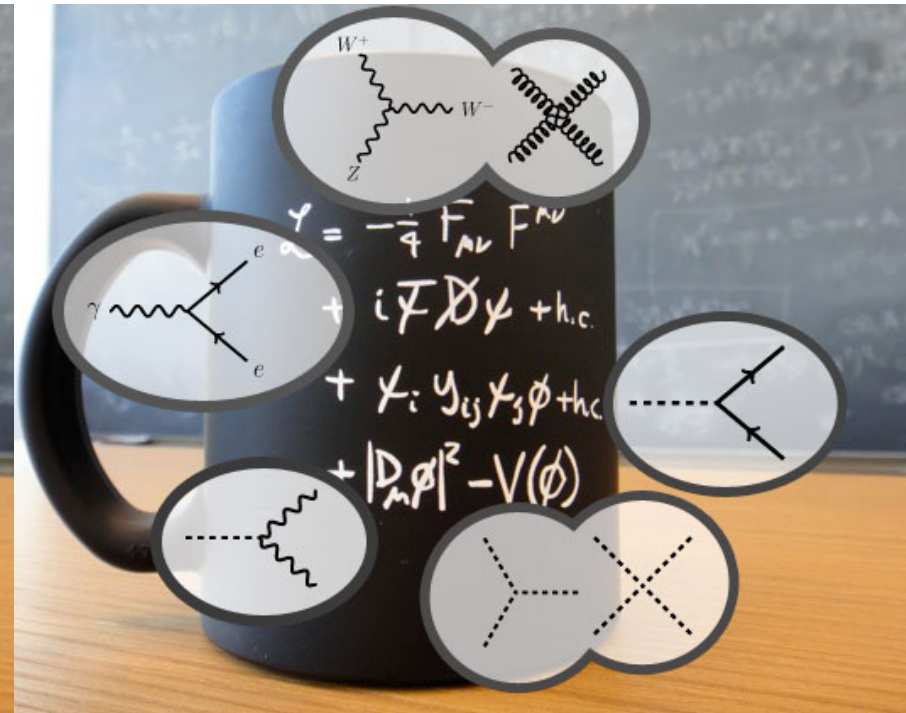
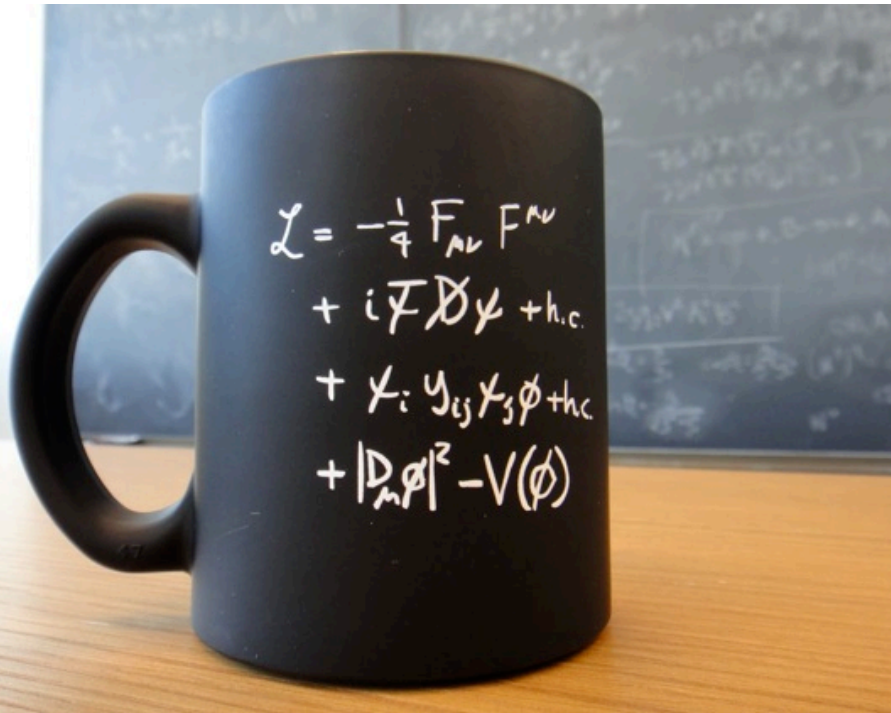
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Physik

# Die Theorie hinter dem Standardmodell: Symmetrien & Lagrangedichten

Michael Kobel  
Technische Universität Dresden

Netzwerk Teilchenwelt Summer School  
CERN 17.07.2018

<http://www.quantumdiaries.org/2011/06/26/cern-mug-summarizes-standard-model-but-is-off-by-a-factor-of-2/>



Lesenswert dazu: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa5b25> (englisch)

<https://cds.cern.ch/record/2244912/files/CERN-OPEN-2017-012.pdf> (deutsch)

## Der Lagrangian entmystifiziert

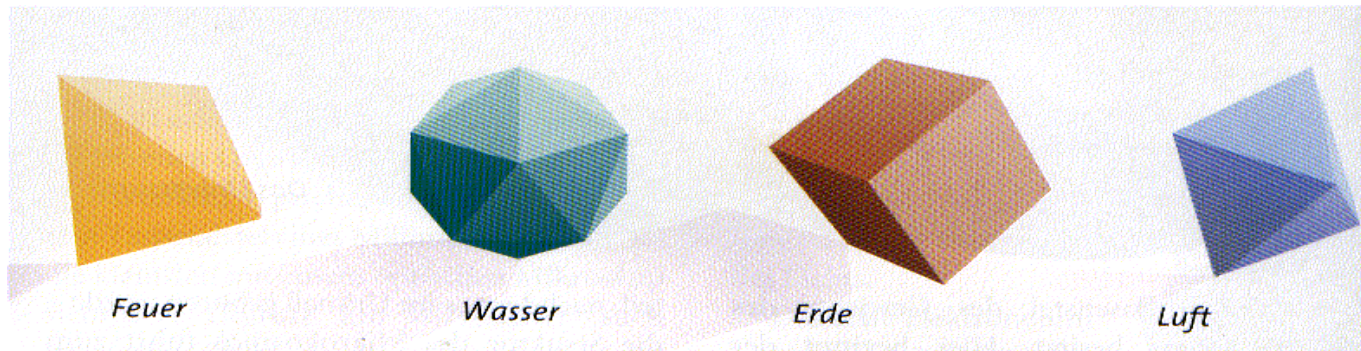
Kaffeeeklatsch mit dem Standardmodell der Teilchenphysik

J. Woithe u. G. Wiener

1. **THEORIEN FRÜHER UND HEUTE**
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. Vorhersagen und Bedeutung

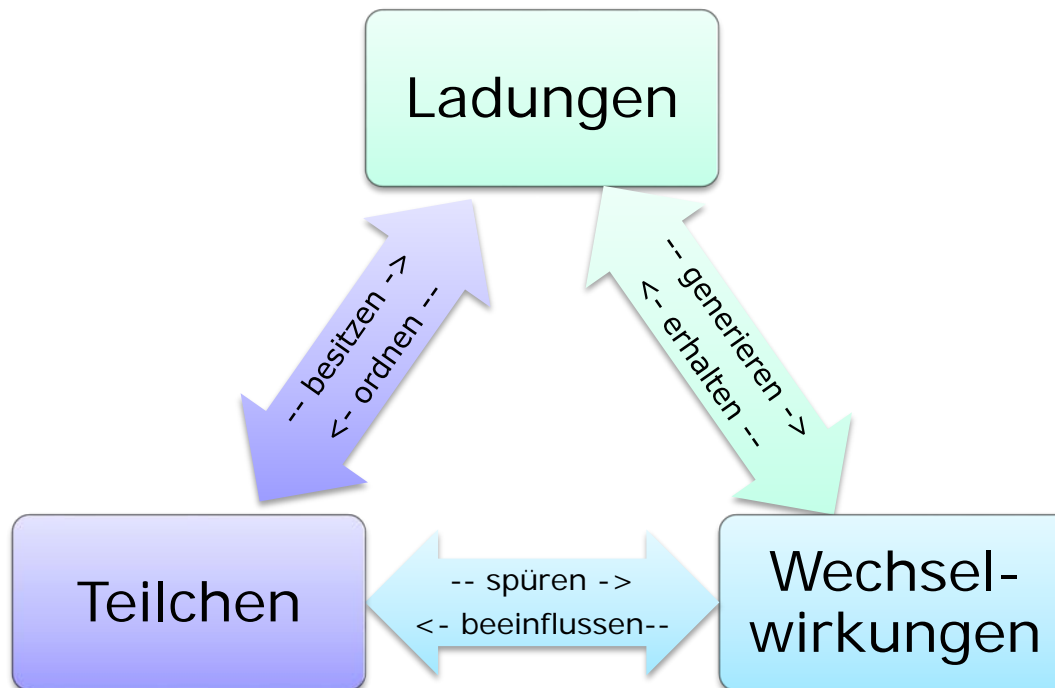
“Standardmodell“ der griechischen Philosophie vor 2500 Jahren

- ❖ **Elemente und Kräfte:** 500-430 v.Chr. Empedokles
  - **Vier Elemente:** Feuer, Wasser, Erde, Luft
  - **Zwei Urkräfte:** Liebe, Haß  $\Leftrightarrow$  Mischung, Trennung
- ❖ **Symmetrien:** 427-347 v.Chr. Platon
  - **Räumliche Symmetrien:** Schönheit der Körper



- ❖ **Kleinste Bausteine:** 460-371 v.Chr. Demokrit
  - **Atome:** verschiedene Formen und Gewichte
  - **Leere:** Verbindung und Bewegung im Nichts

- ❖ **Urkräfte** (heute: enthalten in Wechselwirkungen (WW))
- ❖ **Kleinste Bausteine** (heute: unteilbare Elementarteilchen)
- ❖ **Räumliche Symmetrien** (heute: Ladungssymmetrien)
- ❖ **Neu: verbindendes Konzept: Ladungen für jede WW**
  - → Ladungen sind \*das\* Grundkonzept des Standardmodells (SM) !



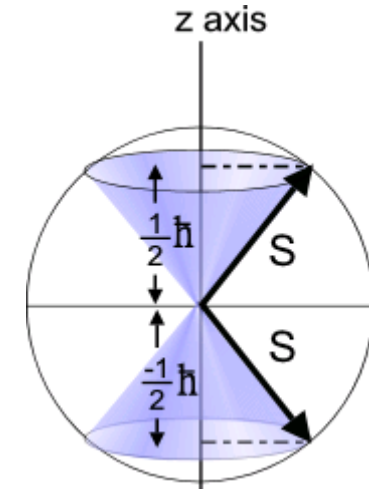
- ❖ Unterschiedliche mathematische Struktur der 3 Ladungen:
  - Starke `Farb`ladung, schwache `Isospin`ladung, elektrische Ladung

Wechselwirkung	Botenteilchen	Ladung der Materieteilchen
Starke	<p><b>Gluonen g</b></p>	<p><b>Starker „Farb“-Ladungsvektor <math>\vec{C}</math></b></p>
Schwache	<p><b>„Weakonen“ (<math>W^+, W^-, Z</math>)</b></p> $\begin{pmatrix} W^+ \\ Z \\ W^- \end{pmatrix} \begin{matrix} I = +1 & Z = +1 \\ I = 0 & Z = 0 \\ I = -1 & Z = -1 \end{matrix}$	<p><b>Schwache „Isospin“-Ladungszahl I</b></p> $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} I = +\frac{1}{2} & Z = +\frac{2}{3} \\ I = -\frac{1}{2} & Z = -\frac{1}{3} \end{matrix}$
Elektromagnetische	<p><b>Photonen <math>\gamma</math></b></p> <p><b><math>Z = 0</math></b></p>	<p><b>Elektrische Ladungszahl Z</b></p> <p><b><math>Z = -1, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \dots</math></b></p>
Gravitation	<b>Gravitonen ? Wahrscheinlich!</b>	<b>Masse ??? Nein!</b>

❖ Zugrundeliegende Symmetrie  
genau dieselbe wie bei Spin

❖ Vektor mit 3 Komponenten

- Spin  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  im Ortsraum
- Schwacher Isospin  $\mathbf{I}^W = (I_1^W, I_2^W, I_3^W)$  im abstrakten schwachen Isospinraum



❖ Messbar nur:

- Gesamter Betrag
- eine Komponente (meist gewählt: die 3.)
- sie beiden anderen sind „unscharf“
- Relevant daher besonders schwache Ladungszahl  $I := I_3^W$

<http://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach-Versuch>

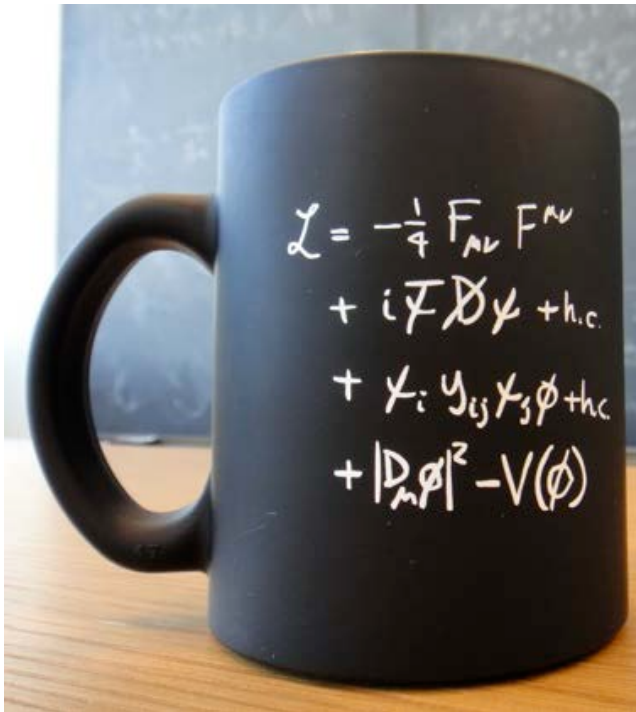
❖ Darstellung der Teilchen in Multipletts

$$\begin{pmatrix} I_3^W \\ +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_3^W \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W^+ \\ Z^0 \\ W^- \end{pmatrix}$$

1. Theorien früher und heute
2. **LAGRANGEFUNKTION IN KLASSISCHER MECHANIK**
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. Vorhersagen und Bedeutung

### ❖ Hintergrund der heutigen „Weltformel“ der Teilchenphysik



$$L = T - V$$

- ❖  $L$ : Lagrange Funktion  
(Joseph L. Lagrange, 1736-1814, Mathematiker)
- ❖  $T$ : Bewegungsenergie
- ❖  $V$ : Potentielle Energie (z.B. Lageenergie)
- ❖ **Vorgehen:**
  - Finde  $T$  und  $V$  für das gegebene Problem
  - Anwenden von Mathematik
  - Erhalte Bewegungsgleichungen und Bewegungen

- ❖ Grundprinzip von Maureau de Maupertuis (1750)

(Prinzip der minimalen Wirkung  $S = \int_A^B L dt$  )

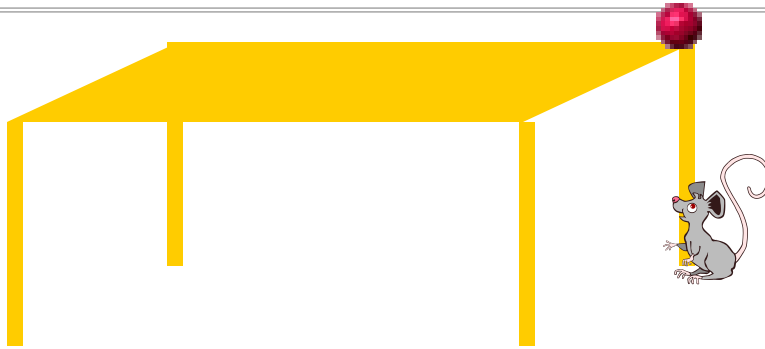
[https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Louis\\_Moreau\\_de\\_Maupertuis](https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Louis_Moreau_de_Maupertuis)

[https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonsches\\_Prinzip](https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonsches_Prinzip)

*Vereinfacht gesagt:*

*Jede Bewegung von A nach B erfolgt so,  
dass der Mittelwert von  $L=T-V$   
so klein (negativ) wie möglich ist*

- ❖ Handwerkszeug: Mathematik von 1744  
(Euler, Lagrange: Variationsrechnung)



$T = 0, V \text{ groß}$   
 $\Rightarrow T-V \text{ sehr negativ}$   
**GUT!**



$T \text{ groß}, V = 0$   
 $\Rightarrow T-V \text{ sehr positiv}$   
**SCHLECHT!**



Mittelwert:  
 minimales  $T-V \Rightarrow$   
 oben lange (langsam)  
 unten kurz (schnell)

❖ Wenn kinetische Energie  $T$  und potenzielle Energie  $V$  bekannt sind:

- Bilde  $L=T-V$

- Definiere die „Wirkung“  $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t)) dt$

- Suche  $x(t)$  und  $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$   
so dass Wirkung  $S$  minimal (= möglichst negativ) wird  
(Bemerkung:  $S$  minimal, wenn zeitlicher Mittelwert von  $L$  minimal)

- Methode: Variationsrechnung (variieren  $x(t)$  solange, bis es passt)  
→ erhalte so Bahn und die Bahngeschwindigkeit

- Ergibt **immer** die Euler-Lagrange Gleichungen der klass. Mechanik  
(Uni-Studium Physik, 2. Semester)

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{dv} = 0$$

- → Newtonsche Bewegungsgleichung → deren Lösung ergibt Bahn  $x(t)$
- Beispiel: freier Fall

$$V = mgx$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

*Jede Bewegung erfolgt so,  
dass das Zeitintegral über  $L=T-V$  („Wirkung“)  
so klein wie möglich ist*

$$L=T-V = \frac{1}{2} mv^2 - mgx$$

nutze: Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dv} = \frac{dL}{dx}$$

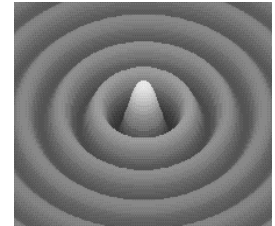
$$\frac{d}{dt} mv = -mg$$

$$ma = -mg$$

erhalte: Newtonsche Bewegungsgleichung

1. Theorien früher und heute
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. **LAGRANGEDICHTEN**
4. Symmetrien
5. Zusammenfassung und Bedeutung

#### ❖ Quantenmechanik verlangt Ersetzungen:



- Keine Bahnen mehr:  $x(t) \rightarrow$  Wellenfunktionen  $\psi(t, x, y, z)$
- Zeitliche **und** örtliche Variationen:  $\frac{d}{dt} \rightarrow \partial_{\mu} := \left( \frac{1}{c} \frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$
- Ersetze Zeitableitung  $v(t) = \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow$  Raum+Zeitableitung  $\partial_{\mu} \psi(t, x, y, z)$

#### ❖ Lagrangefunktion L (Energie) $\rightarrow$ Lagrangedichte $\mathcal{L}$ (Energiedichte)

- Statt  $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t)) dt \rightarrow$  Wirkung  $S = \iiint \int_{x,y,z,t} \mathcal{L}(\psi(t, x, y, z), \partial_{\mu} \psi(t, x, y, z)) dx dy dz dt$
- Lagrangedichte wird weiterhin gebildet als  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$
- Aber:  $\mathcal{T}$ : kin. Energiedichte,  $\mathcal{V}$ : potenzielle Energiedichte sind nur für freie Teilchen (ohne WW) aus Quantenfeldtheorie bekannt
- **\*Die\* theoretische Herausforderung: finde allgemein generelles  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$**

$$\mathcal{V} = mc^2 \bar{\psi} \psi$$

$$\mathcal{T} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

Euler-Lagrange Variationsrechnung:  
*Jede Bewegung erfolgt so,  
dass das Raum-Zeitintegral über  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$   
so klein wie möglich ist*

(Uni-Studium Physik, 6. Semester)

<https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Matrizen>

Dirac Gleichung

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0$$

(entspricht dem Newtonschen  $F=ma$ )

Dirac wollte die Fermionen lineare Bedingungen  
 ↳ Linearisierung

$$\text{Ansatz } (\not{p} \not{p} - m^2 c^2) = (\underbrace{\not{y}^\lambda \not{p}_\lambda + mc}_{\text{neue Zahlen}}) (\not{y}^\kappa \not{p}_\kappa - mc) = 0$$

Ergebnis oftener:

$$\not{y}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} (\not{y}^\lambda)^2 = 1 \quad (\not{y}^\lambda)^2 = (\not{y}^\lambda)^2 = (\not{y}^\lambda)^2 = -1 \\ \not{y}^\lambda \not{y}^\kappa = -\not{y}^\kappa \not{y}^\lambda \text{ für } \lambda \neq \kappa \end{array} \right.$$

↳ keine "normale" komplexe Zahlen

→ hyperkomplexen Zahlen

→ verschiedene Darstellungen z.B. Matrizen

⇒ Dirac Matrizen  $\not{y}^\mu$  sind Darstellung d. h.k. Zahlen

Dnac Matrizen ( $4 \times 4$  Matrizen)

ASK:  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

PAULI MATRIZEN

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$   $(\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \vec{\gamma}^3) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{b} \\ -\vec{b} & 0 \end{pmatrix}$

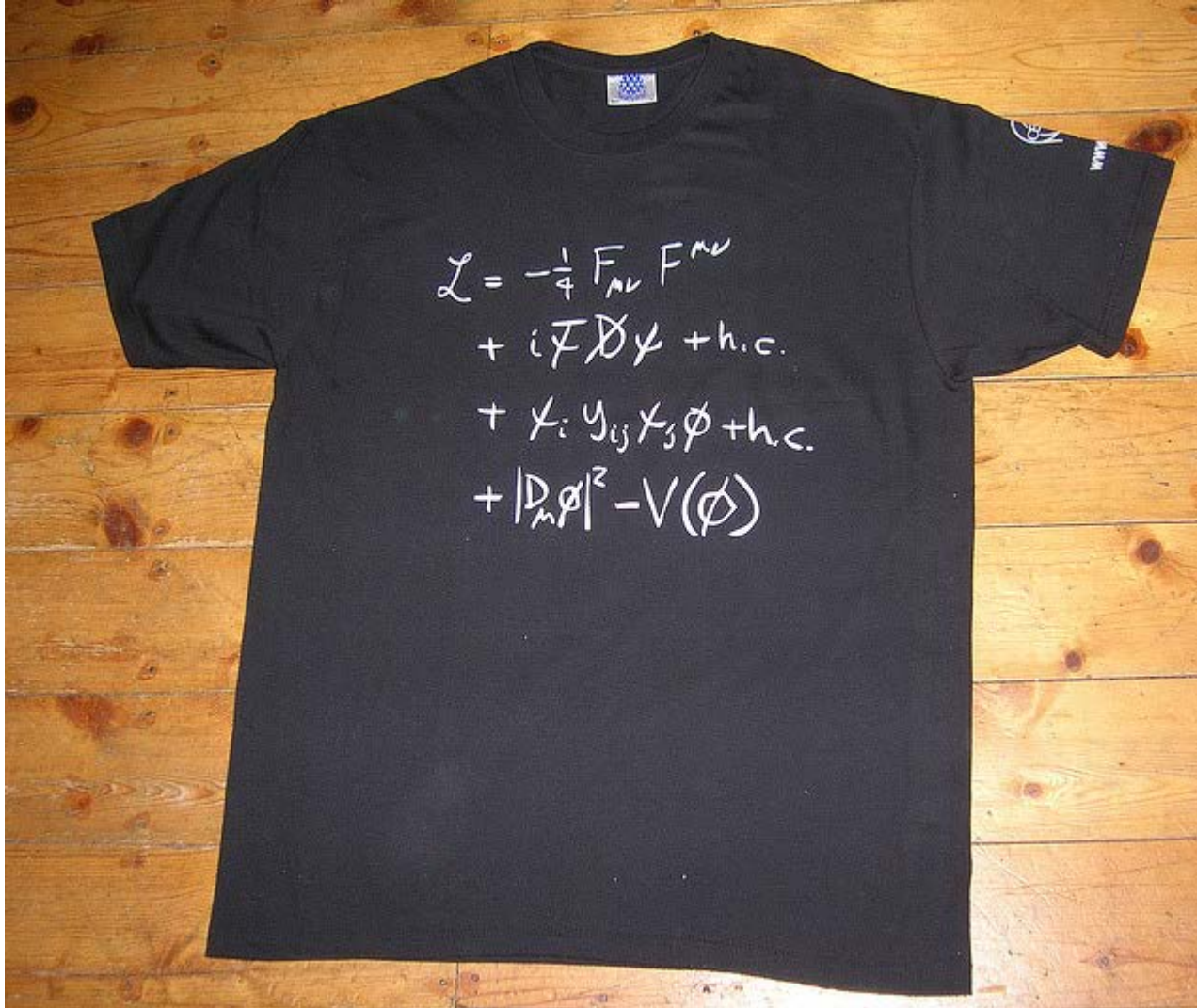
$\gamma_0 = \gamma^0$   $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = -(\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \vec{\gamma}^3)$

$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$4 \times 4$  \*  $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  Dnac-Gleichung  $(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0$

$\Rightarrow$  Lösung  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \\ \psi_3(x, t) \\ \psi_4(x, t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^- \uparrow, e^- \downarrow, e^+ \uparrow, e^+ \downarrow$   
4 Freiheitsgrade



- ❖ „Weltformel“ auf CERN T-shirt und Mouse Pad



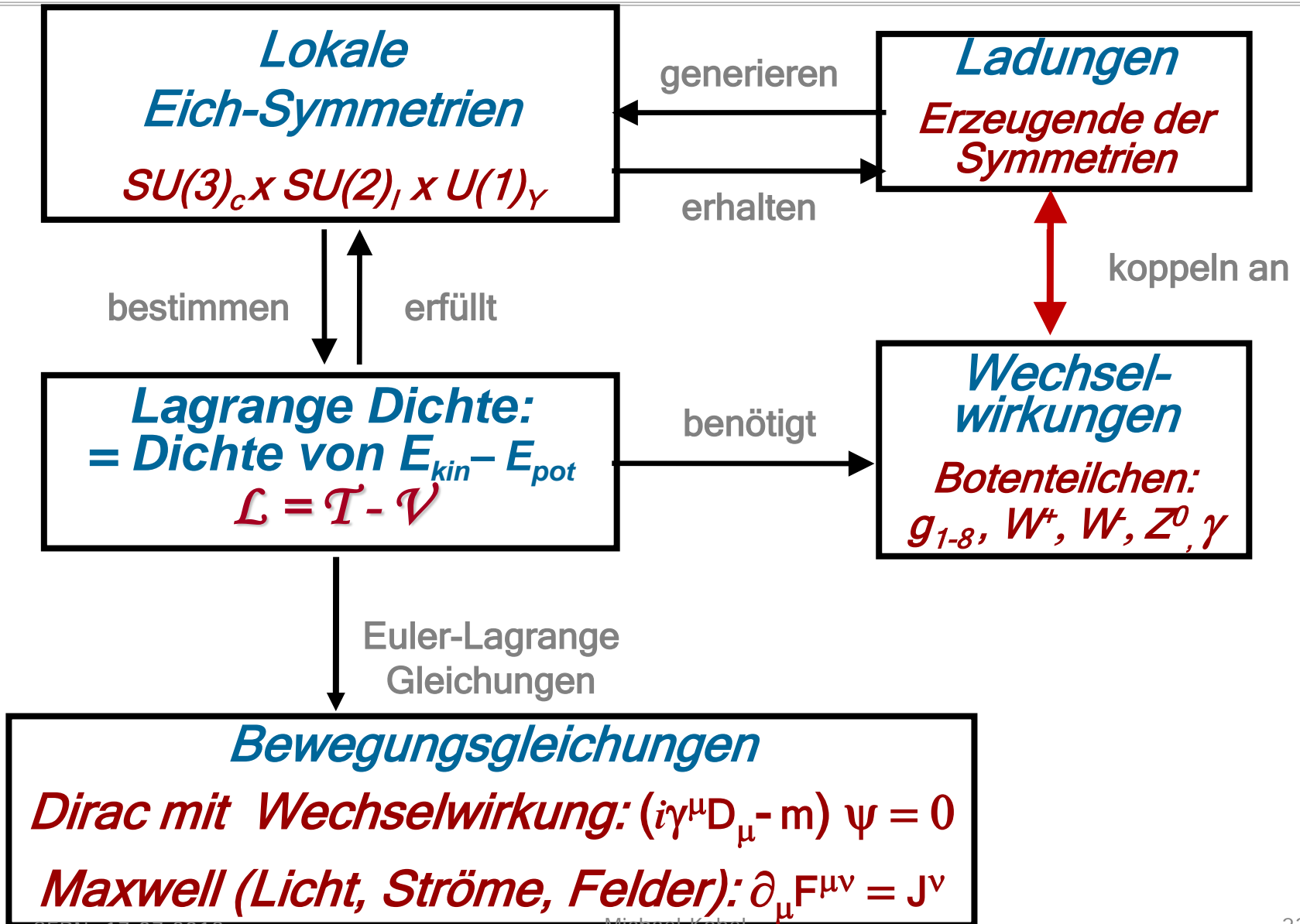
1. Theorien von früher und heute
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. **SYMMETRIEN**
5. Zusammenfassung und Bedeutung

## 4. Mathematische Symmetrien (Hermann Weyl)

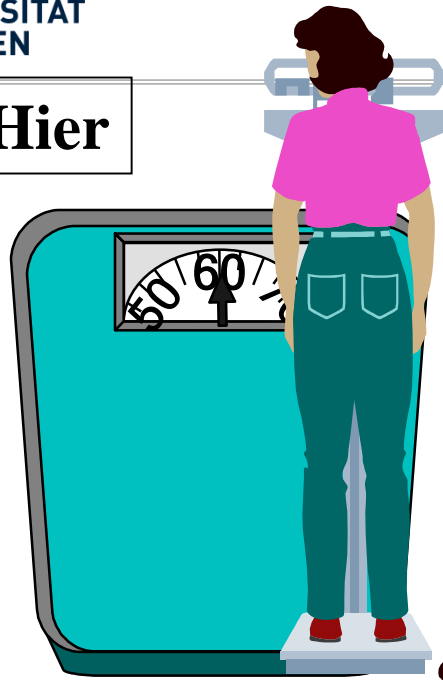
Werkzeugkiste: Transformationsgruppen



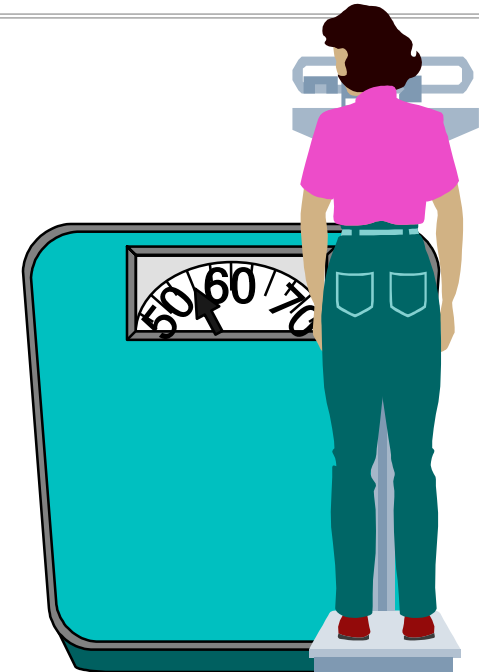
R.P. Feynman: Ein **Objekt** heißt *symmetrisch*, wenn man mit ihm **etwas anstellen** kann, **ohne** es am Ende, wenn man fertig ist mit der Prozedur, **geändert** zu haben.



Hier

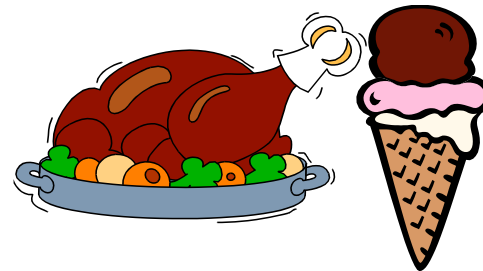
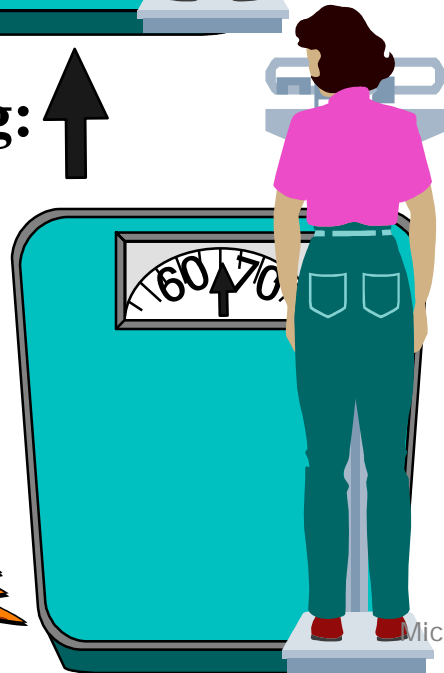


Dort

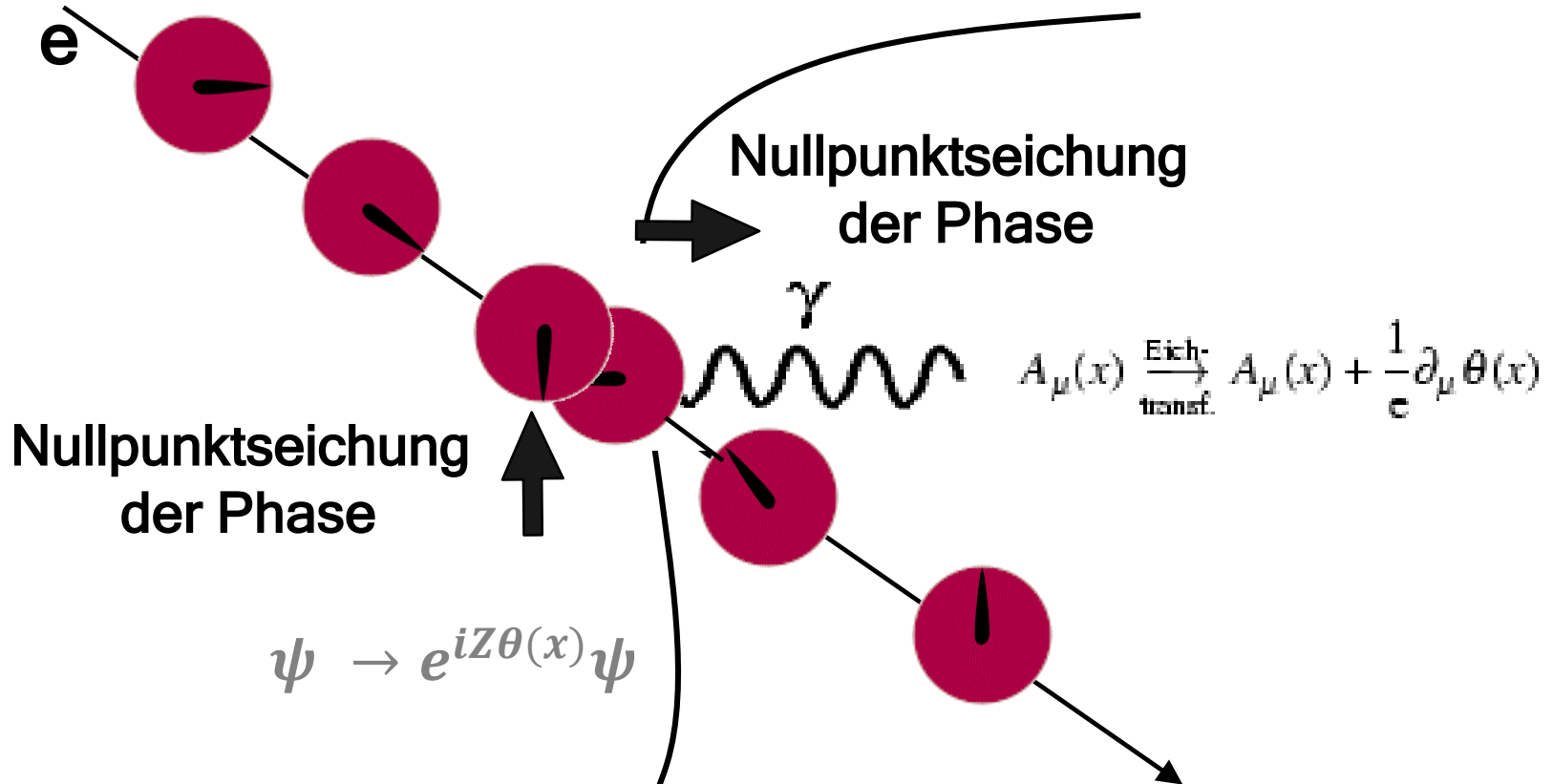


Messung:

Messung:

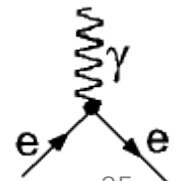


- ❖ Lokale Eichsymmetrie erfordert
  - Absorption oder Emission von "Eich-Teilchen"

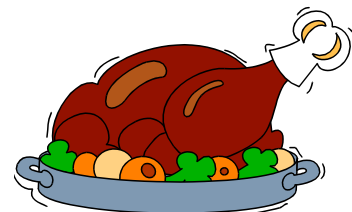
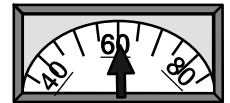
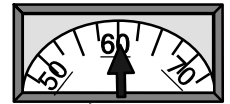


- QED 1927: Dirac, Jordan, Heisenberg, Pauli...  
Eichtheorie 1941: Pauli, ...

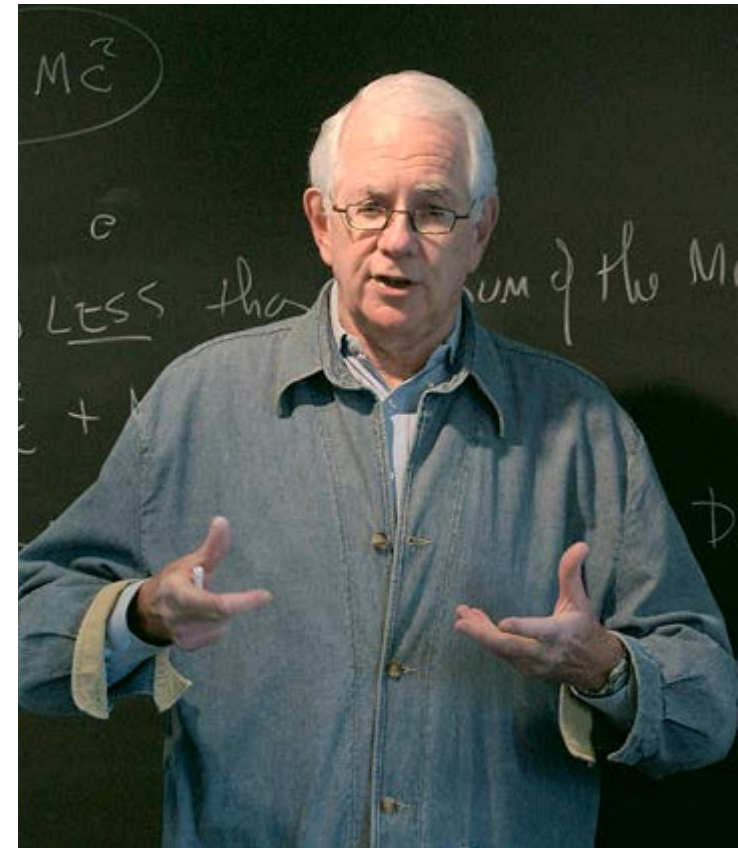
Ergebnis:  
Fundamentalprozess („Vertex“)  
Aufnahme oder Abgabe  
eines Eichbosons (*Photon*  $\gamma$ )



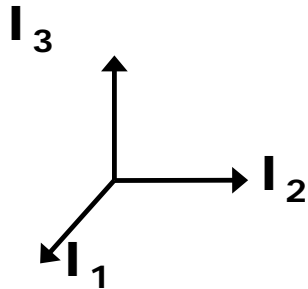
- ❖ Ziel der *Person (Teilchen)*:
  - Keine Änderung des *angezeigten Gewichts (Phasenwerts)* unter lokalen Änderung der Eichung
- ❖ *Sensitivität* auf Umeichungen
  - Bestimmt durch *Meßskala (Ladungszahl Z)*
- ❖ Wahrscheinlichkeit der *Nahrungsänderung (Wechselwirkung)*
  - *Häufigkeit der Gewichtskontrolle (Kopplung  $e =: g_e \sqrt{(\hbar c \epsilon_0)}$ )*
- ❖ Zunahme oder Abnahme von *Gewicht (Phase)*
  - in Form von *Nahrung (Eichbosonen: Photonen)*
- ❖ Menge der *Zu- und Abnahme (QM-Amplitude)*
  - *Produkt von Sensitivität \* Häufigkeit (Produkt  $Z * e$ )*



- Sheldon Glashow (\*1932)
- 1950: Bronx High School of Science (selbe Klasse wie Steven Weinberg)
- 1959: Ph.D. in Harvard bei Julian Schwinger (Nobelpreis für QED 1965 mit Feynman und Tomonaga)
- 1961: Vorschlag  $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$   
*Partial Symmetry of Weak Interactions*,  
*Nuclear Physics*, Bd. 22, 1961, S. 579. [Abstract](#)
- Einführung des Schwachen Isospins  $I^W$   
 [ da Quarks unbekannt für  $(p,n)$  und  $(e,\nu_e)$  ]  
 analog zum vorher bekannten Starke Isospin  $I^S$
- Ad-hoc Einführung der Elektroschwachen Mischung und des schwachen Mischungswinkels  
*(Diskussion später diese Woche)*
  - Vorhersage des  $Z^0$  („neutrale schwache Ströme“)
  - Photon-Kopplungen so, dass es an Elektr. Ladung und damit nicht an Neutrinos koppelt  
 (keine Erklärung, warum die Natur ausgerechnet diesen Mischungswinkel wählte)
- Probleme mit Teilchenmassen, da Symmetrien nur mit masselosen Teilchen möglich



❖ 1961 S.Glashow: Eichung der schwachen Ladung

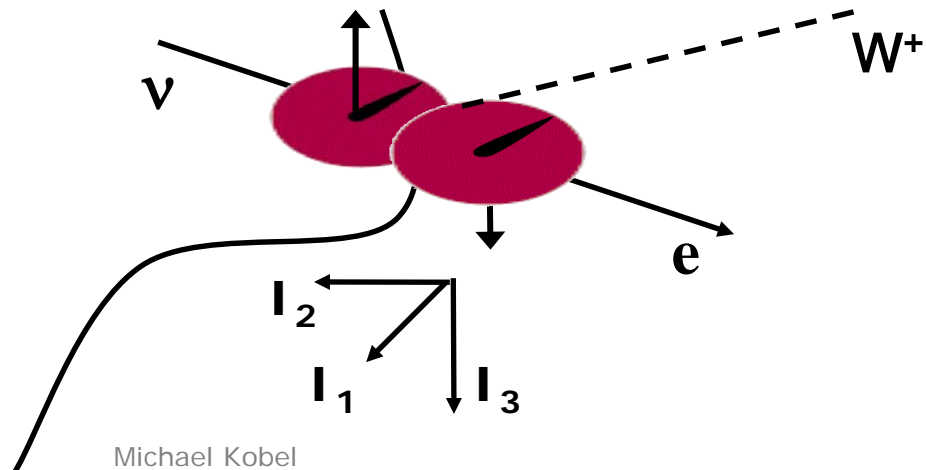
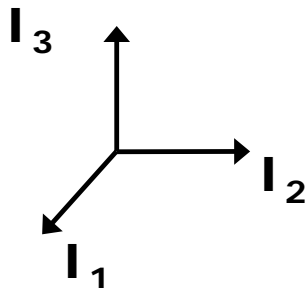


Neutrino:  $I_3 = \frac{1}{2}$   
Proton:  $I_3 = \frac{1}{2}$

Elektron:  $I_3 = -\frac{1}{2}$   
Neutron:  $I_3 = -\frac{1}{2}$

Idee:  $(\nu, e)$  und  $(p, n)$  unterscheiden sich jeweils *nur* durch die „Richtung“ des schwachen Ladungsvektors  $I^W$

❖ lokale Umeichung



- ❖ 1961: GLASHOW (\*1932)
- ❖ 1964: ENGLERT, BROUT, HIGGS  
KIBBLE, GURALNIK, HAGEN (Bilder)
- ❖ 1964: GELL-MANN (\*1929), ZWEIG(\*1937)
- ❖ 1965: HAN, NAMBU (\*1921), GREENBERG
- ❖ 1967: SALAM (1926-96), WEINBERG (\*1933)  
Weinberg: "A model of Leptons"
- ❖ 1973: GROSS, POLITZER, WILCZEK,  
FRITSCH, GELL-MANN, LEUTWYLER, WEINBERG

Lokale Elektroschwache Eichsymmetrie

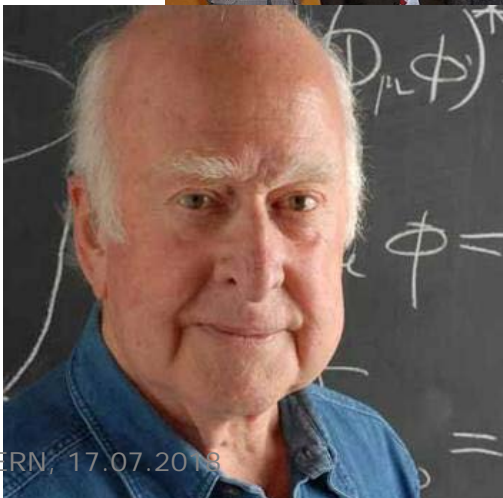
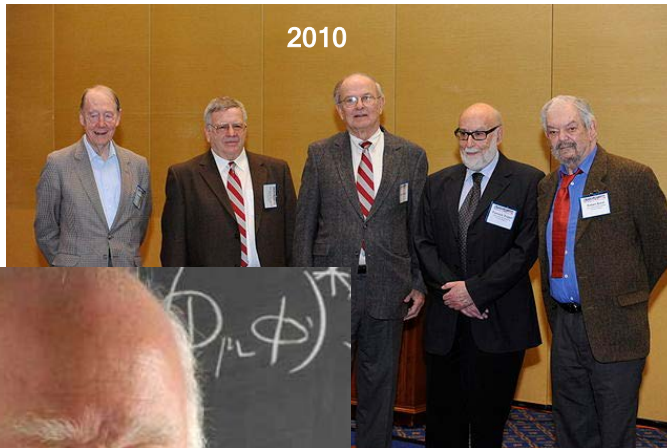
Spontane Symmetriebrechung  
zur Massenerzeugung ("Higgs Boson")

Quarks

Starke "Farb-" Ladung

Anwendung auf Baustein-Teilchen  
(Nobelpreis 1979 mit Glashow, Foto)

starker Kopplungsparameter (Nobelpreis 2004)  
und Lokale Eichsymmetrie der starken WW

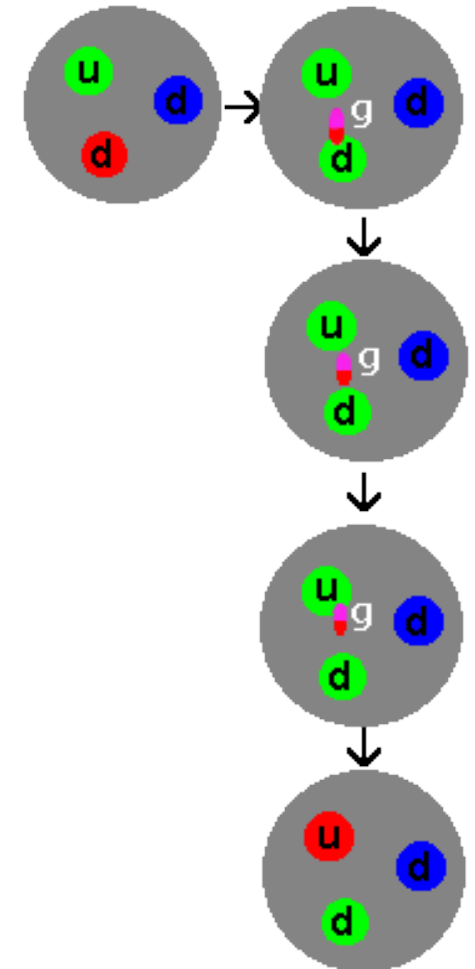
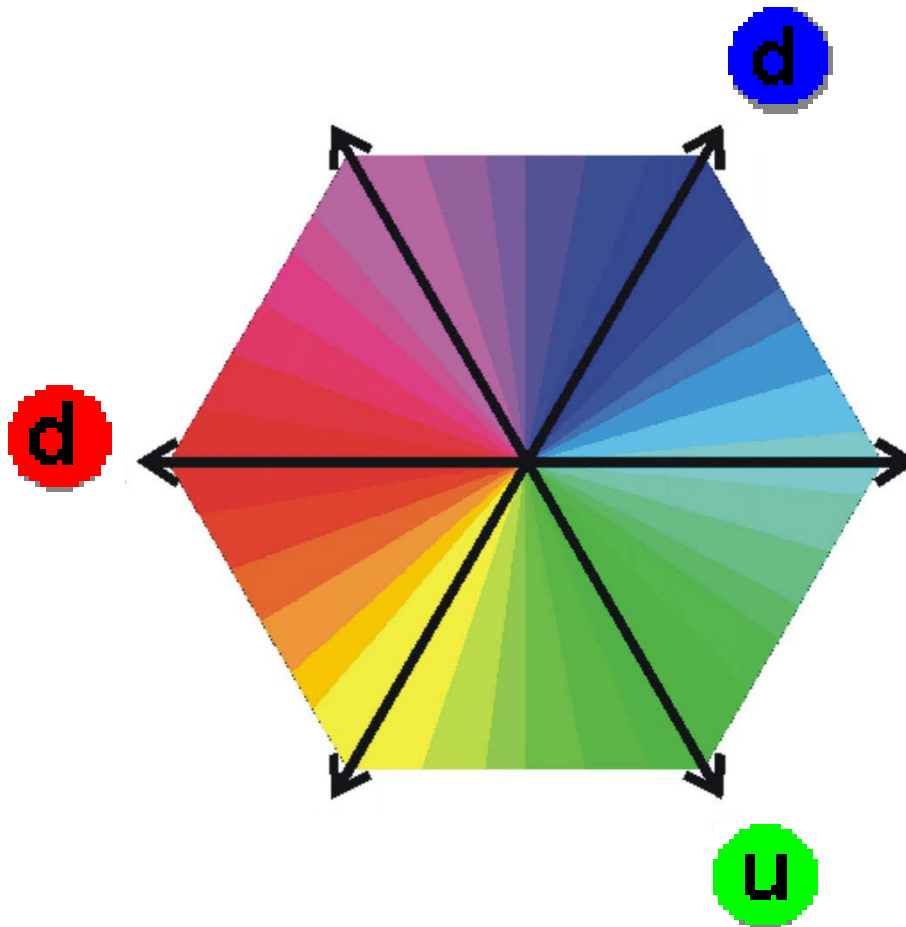


$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu)^2 - \bar{R}\gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) R - L\gamma^\mu (\partial_\mu + ig\vec{t} \cdot \vec{A}_\mu - i\frac{1}{2}g' B_\mu) L$$

$$-\frac{1}{2}|\partial_\mu \varphi - ig\vec{A}_\mu \cdot \vec{t}\varphi + i\frac{1}{2}g' B_\mu \varphi|^2 - G_e (\bar{L}\varphi R + \bar{R}\varphi^\dagger L) - M_1^2 \varphi^\dagger \varphi + h(\varphi^\dagger \varphi)^2. \quad (4)$$

[http://prl.aps.org/pdf/PRL/v19/i21/p1264\\_1](http://prl.aps.org/pdf/PRL/v19/i21/p1264_1)

- ❖ 1973: Gross, Politzer, Wilczek, Nambu, Fritzsche...  
starke WW durch Umeichung der Farbladung



❖ Jede Eichsymmetrie wird durch n Ladungsoperatoren T "generiert"

- *Emag Symmetrie mit  $n=1$  durch  $\hat{Z}$   
(1x1 Matrix)*
- *Schwache Isospin Eichsymmetrie mit  $n=3$  durch  $\hat{I}_i := \frac{1}{2} \sigma_i, i=1,2,3$   
 $\sigma_i$  Pauli-Matrizen (2x2)*
- *Starke Eichsymmetrie mit  $n=8$  durch  $\hat{C}_a := \frac{1}{2} \lambda_a, a=1, \dots, 8$   
 $\lambda_a$  Gell-Mann-Matrizen (3x3)*

❖ Die Ladungen sind Eigenwerte der "Generatoren"

- *z.B.  $I_3(e^-) = -\frac{1}{2}$ , da  $\hat{I}_3 |e^- \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_e \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} |e^- \rangle$*
- *Nicht-diagonal Operatoren haben keinen Eigenwert -> nicht messbar*
  - *Schwache Ladung: 1 Eigenwert*
  - *Starke Ladung: 2 Eigenwerte (2-dim Vektor)*

## Die 8 Gell-Mann Matrizen und Leiteroperatoren (Berger, Kap.4)

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

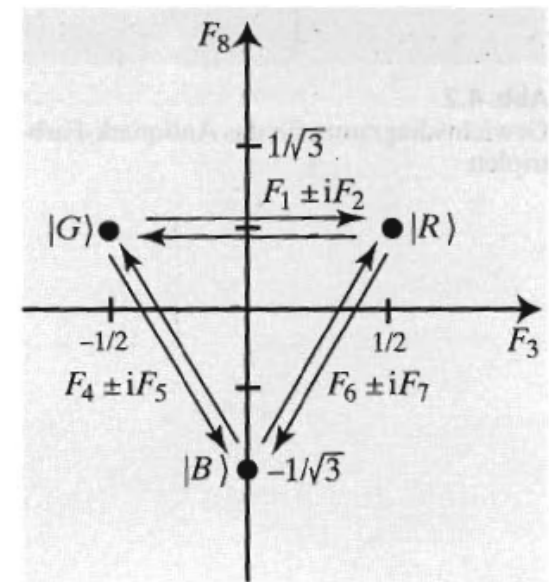
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentaldarstellung, das Triplet, ist wieder durch die Matrizen der Gruppe selbst gegeben, also gilt für die Generatoren

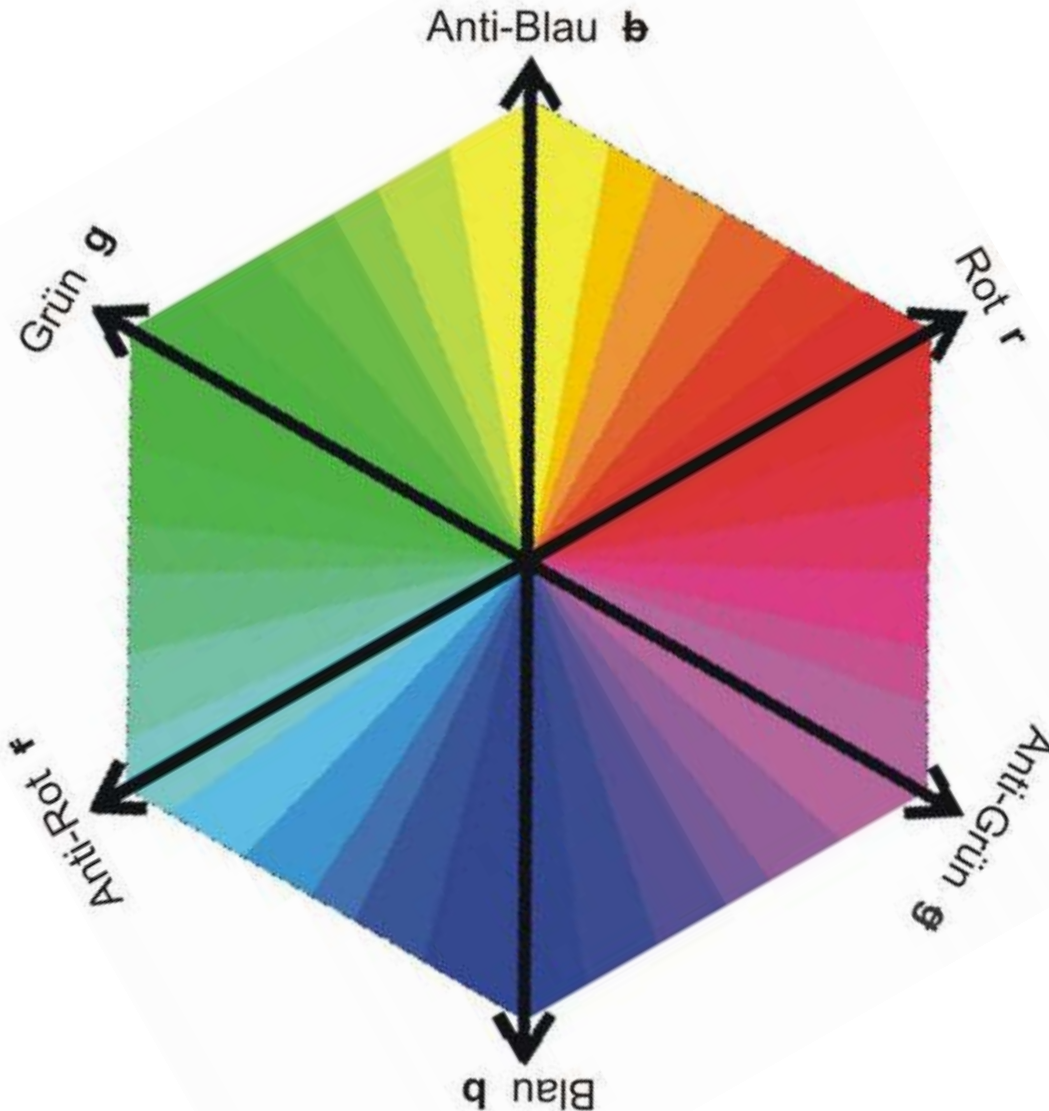
$$F_i = \lambda_i/2. \quad (4.15)$$

Die zugehörigen Basisvektoren innerhalb des Multipletts, in unserem Fall also die Farbzustände  $|R\rangle$ ,  $|G\rangle$ ,  $|B\rangle$ , unterscheiden sich durch die Eigenwerte zu  $F_3$  und  $F_8$ . Man stellt sie graphisch in einem sog. Gewichtsdiagramm (Abb. 4.1) dar, das entsprechend dem Rang 2 der Gruppe die Ebene ausfüllt.

Analog zum Vorgehen bei  $SU_2$  faßt man auch bei  $SU_3$  die neben den Eigenwertoperatoren verbleibenden Generatoren zu Leiteroperatoren zusammen. Durch sie kann man Zustände ineinander überführen. Ihre Wirkung läßt sich sehr anschaulich durch die Pfeile in Abb. 4.1 verdeutlichen.



**Abb. 4.1**  
Gewichtsdiagramm für das Quark-Farbtriplett



Darstellung der Basisvektoren  $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann verifiziert man mit Hilfe von (4.15) sofort

$$F_3|R\rangle = \frac{1}{2}|R\rangle$$

oder

$$F_8|B\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}}|B\rangle .$$

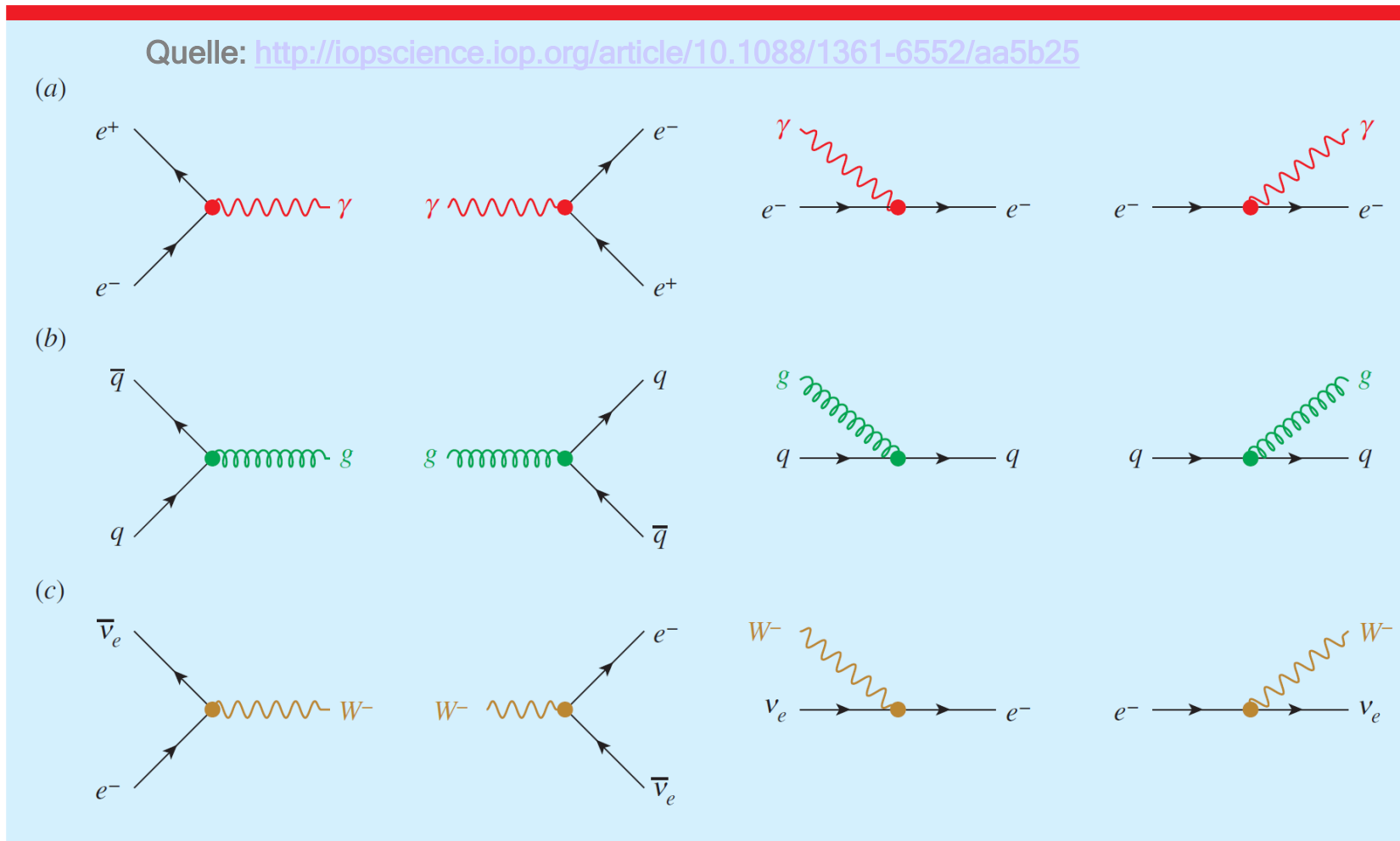
Wirkung der Leiteroperatoren

Als Beispiel wird

$$F_1 + iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Offenbar gilt  $(F_1 + iF_2)|G\rangle = |R\rangle$ .

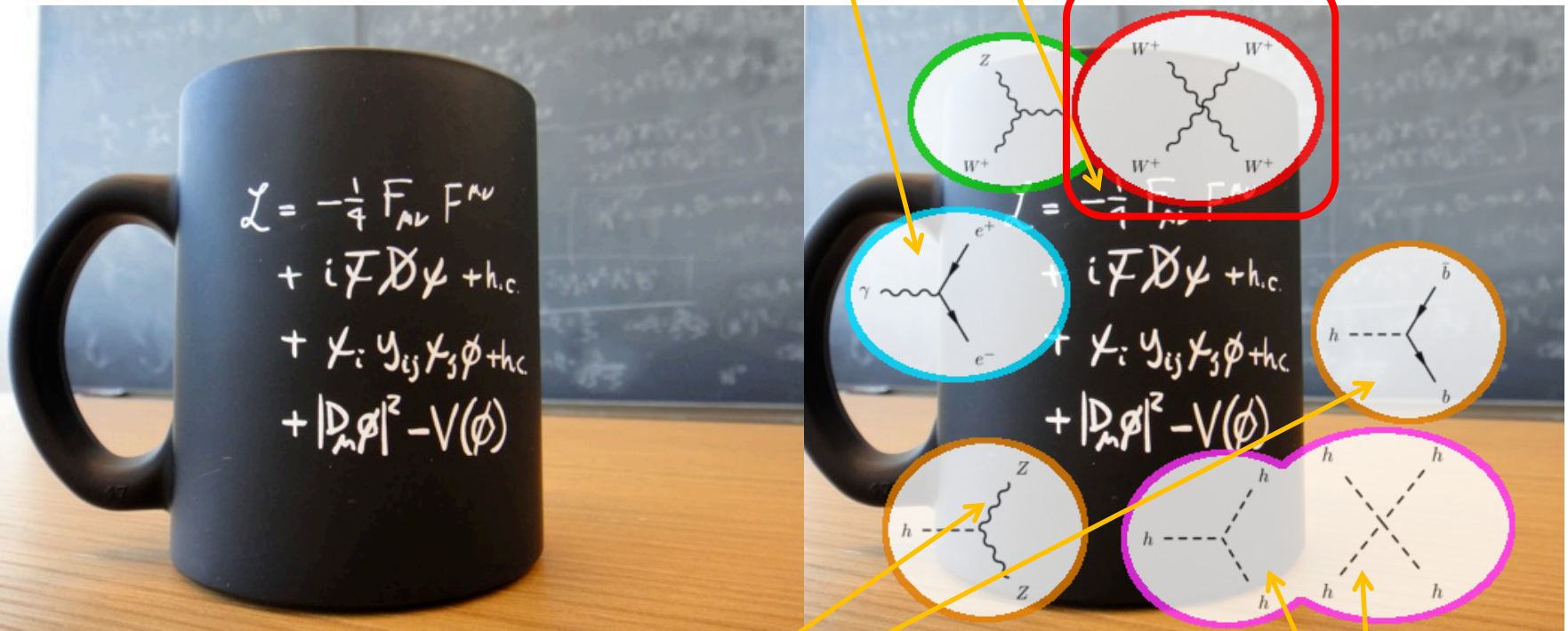
- ❖ Freie Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  nicht invariant unter **\*lokalen\*** Eichtransf.
- ❖ Invarianz nur möglich, wenn "Eichbosonen"  $V_\mu$  vorhanden  
 $V_\mu =$  Gluonen  $G_{a\mu}$ ,  $a=1,\dots,8$ , Weakonen  $W_{i\mu}$ ,  $i=1,2,3$ , Photon  $A_\mu$
- ❖ Zahl der Eichbosonen = Zahl der Generatoren  $T$  der Symmetrie
  - Emag:  $\hat{Z}$
  - Schwach:  $\hat{I}_i$   $i=1,2,3$
  - Stark:  $\hat{C}_a$   $a=1,\dots,8$
- ❖ Eichbosonen haben **\*Wechselwirkung\*** mit Materiemultipletts
  - einfaches "Rezept" zur Erfüllung der Symmetrien:  
 Ersetze die Ableitung  $\partial_\mu$  durch  $D_\mu = \partial_\mu + \iota g \Sigma T V_\mu$   
*z.B. Elektromagnetismus*  $D_\mu = \partial_\mu + \iota g_{em} Z A_\mu$   
*Schwache Wechselwirkung*  $D_\mu = \partial_\mu + \iota g_W \Sigma I_i W_{i\mu}$



**Figure 4.** Basic vertices of the electromagnetic interaction (a), strong interaction (b), and weak interaction (c). From left to right: examples of annihilation, pair production, absorption, and emission.

Wechselwirkungen zwischen  
**Boten und Bausteinen**

**Botenteilchen unter sich:**  
 → emag Wellen, Confinement, VBS...

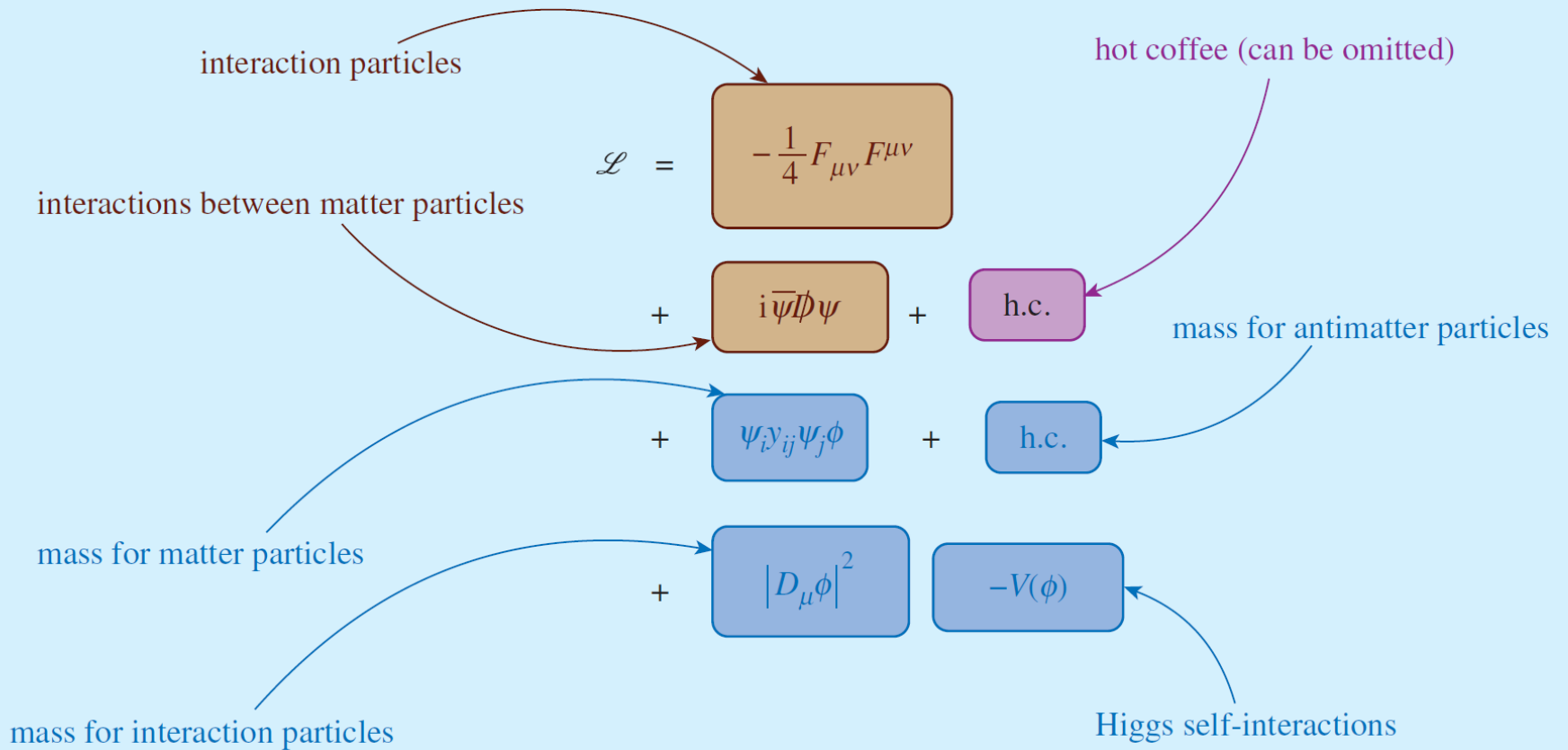


<http://www.quantumdiaries.org/2011/06/26/cern-mug-summarizes-standard-model-but-is-off-by-a-factor-of-2/>

**Higgs mit Bausteinen und Boten**

Massen der Bausteine und Botenteilchen  
 Erzeugung und Zerfälle des Higgs Teilchens

**Higgsteilchen unter sich**  
 noch nicht beobachtet



## ❖ Feldstärketensor, siehe

[https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetischer\\_Feldst%C3%A4rketensor](https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetischer_Feldst%C3%A4rketensor)

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist gewöhnlich definiert durch das **Vektorpotential**:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

z. B. mit dem klassischen Vektorpotential

$$A^\mu = \left( \phi/c, \vec{A} \right)$$

Diese Definition ist auch für die **Quantenelektrodynamik** gültig. Dort ist einfach nur das Vektorpotential operatorwertig. Es ist ein Spezialfall der **Feldstärketensor**-Definition einer allgemeinen **Eichtheorie**.

Die Matrixdarstellung des Feldstärketensors ist *koordinatenabhängig*. In einer flachen Raumzeit (also mit **Minkowski-Metrik**) und **kartesischen** Koordinaten kann der kontravariante Feldstärketensor geschrieben werden als:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Theorien von früher und heute
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. **ZUSAMMENFASSUNG UND BEDEUTUNG**

### ❖ Aufstellung der Terme der Lagrangedichte:

- Natur verlangt ihre Invarianz unter 3 „lokalen Umeichungen“  
-> 3 lokale Eichsymmetrien
- Jede Symmetrie lässt sich nur mit Hilfe von Wechselwirkungstermen in der Lagrangedichte erfüllen  
-> **lok. Eichsymmetrie ist „Ursache“ der Wechselwirkungen !**

### ❖ Bedeutung der Terme in der Lagrangedichte:

- Jedem Term entspricht entweder  
→ kinetische Energie freier Teilchen  
→ Wechselwirkung (Vertex) zwischen Teilchen
- Terme (=Vertices), die die Eichsymmetrie nicht erfüllen, sind verboten und damit auch Prozesse, die diese erfordern.
- Bewegungsgleichungen (Dirac, Klein-Gordon, Maxwell,...) folgen aus Prinzip minimaler Wirkung

- ❖ Aus Axiomen des Standardmodells
  - 3 Symmetrien mit je 1 freien Kopplungsparameter  $\alpha$
  - Spontane Brechung 1 Symmetrie durch das BEHiggs-Feld (mind. 21 weitere freie Parameter)
  
- ❖ ergibt sich theoretische Vorhersagekraft für
  - Anzahl und \*alle\* Eigenschaften der Botenteilchen (daher konnte Glashow das  $Z^0$  voraussagen)
  - Erlaubte und verbotene Prozesse mit Wahrscheinlichkeiten und Winkelverteilungen
  - Energie (Abstands-)abhängigkeit der Kopplungsparameter  $\alpha$
  
- ❖ wobei als rein experimenteller Input nicht vorhersagbar sind
  - freie Parameter
  - Objekte (Materieteilchen-Multipletts) auf die die Symmetrien wirken

## Why are all the interactions so similar in their structure?

*There are a number of possibilities:*

- ❖ *The first is the limited imagination of physicists:  
When we see a new phenomenon, we try to fit it in the frame-work we already have - until we have made enough experiments we don't know that it doesn't work...  
It's because physicists have only been able to think of the same damn thing, over and over again.*
- ❖ *Another possibility is that it is the same damn thing over and over again - that Nature has only one way of doing things, and She repeats her story from time to time.*
- ❖ *A third possibility is that things look similar because they are aspects of the same thing - some larger picture underneath...*

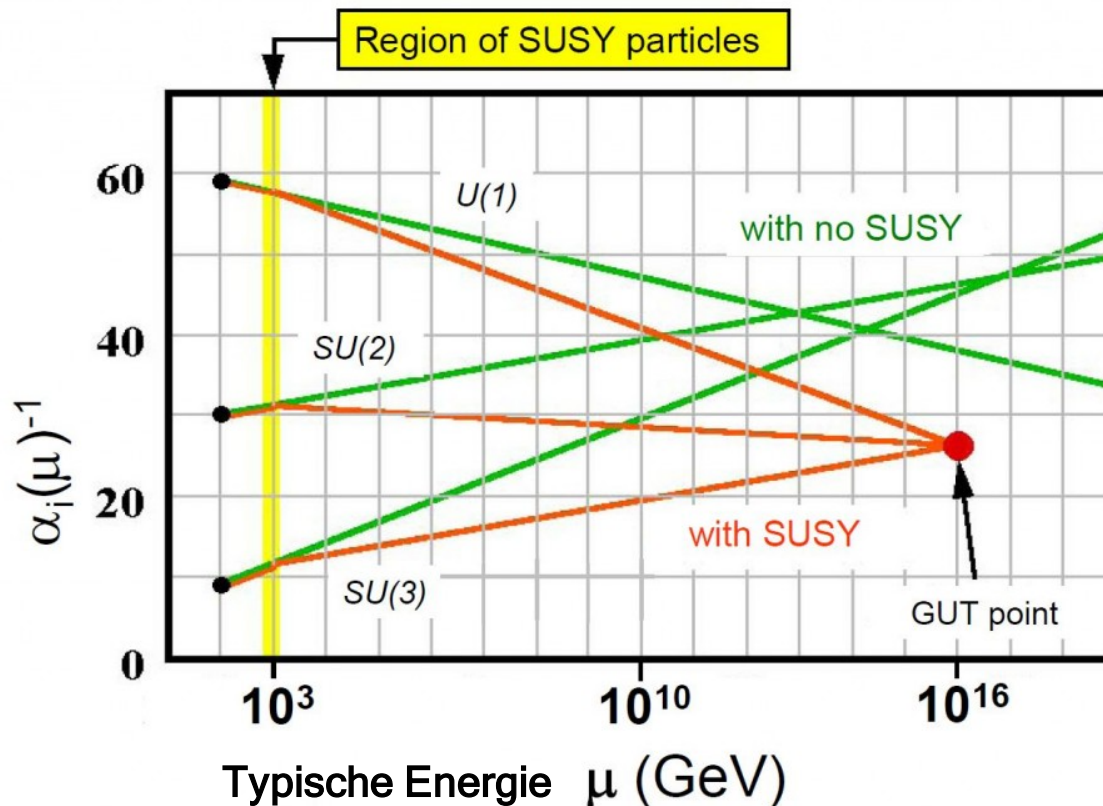
Richard. P. Feynman, "The strange theory of light and matter"

Princeton University Press, 1985

"Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie"

CERN, 17.07.2018 Piper Taschenbuch, 9,95€ Michael Kobel

- ❖ Kopplungsparameter  $\alpha$  nähern sich bei hoher Energie an  
→ alle Kräfte haben ähnliche Stärke
- ❖ Zeichen für einen gemeinsamen Ursprung aller Wechselwirkungen?



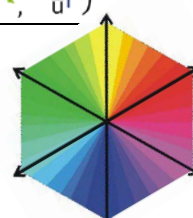
<http://sites.uci.edu/energyobserver/2012/12/02/update-on-some-higgs-blog-entries/>

- ❖ Klappt sogar noch besser mit Supersymmetrie!

# ANHANG

## Übersicht Wechselwirkungen und Eichbosonen

### ❖ Eichsymmetrien mit masselosen Eichbosonen (ungebrochen)

Eichsymmetrie	QED $U(1)_Z$	QCD $SU(3)_c$
	abelsch	nicht- abelsch
$D_\mu$	$\partial_\mu + ie\hat{Z} A_\mu$	$\partial_\mu + ig_s C_a G_{a\mu}$
Kopplung	$g_{em}=0.3$ (= e nat. Einh. )	$g_s = 1.2$
Generatoren	1: $\hat{Z}$ (1x1)	8 : $C_a$ (3x3)
Eichfelder	$A_\mu$	$G_{a\mu}, a = 1, \dots, 8$
Eichbosonen	Photon $\gamma$	Gluonen $g_{1\dots 8}$
Wirkt auf Teilchenmultiplett	(e),( $\mu$ ),( $\tau$ ), (u),(c),(t), (d),(s),(b)	( $u^+$ , $u^0$ , $u^-$ ) ( $d^+$ , $d^0$ , $d^-$ ) ( $s^+$ , $s^0$ , $s^-$ ) ( $\bar{u}^+$ , $\bar{u}^0$ , $\bar{u}^-$ )
Ladungen	Elektrische Ladung -1, -1, -1, + $\frac{2}{3}$ , - $\frac{1}{3}$ , - $\frac{1}{3}$ ,...	Starke Farb- ladung 

❖ Schwache Eichsymmetrien: ungebrochen nur bis  $\sim 10^{-10}$  s nach dem Urknall

Eichsymmetrie	$U(1)_Y$	("QFD") $SU(2)_I$
	abelsch	nicht- abelsch
$D_\mu$	$\partial_\mu + ig_Y \hat{Y}^W B_\mu$	$\partial_\mu + ig_W I_i W_{i\mu}$
Kopplung	$g_Y = 0.36$	$g_W = 0.63$
Generatoren	1: $\hat{Y}^W$ (1x1)	3 : $I_i$ (2x2)
Eichfelder	$B_\mu$	$W_{i\mu}, i = 1, \dots, 3$
Eichbosonen	B-Boson	Weakonen $W^+, W^-, W_3^0$
Wirkt auf Teilchenmultiplett	$(e), (\mu), (\tau), (v_e), (v_\mu), (v_\tau),$ $(u), (c), (t), (d), (s), (b)$	$\begin{pmatrix} v_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$
Ladungen	Schwache Hyperladung $Y^W = Q - I_3$	Schwache Isospin-Ladung $I_3 = \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

❖ nach Symmetriebrechung im Brout-Englert-Higgs Feld  $B^0$  und  $W^0$  vermischt zu  $Z^0$  und  $\gamma$  in "elektroschwacher Wechselwirkung"

- ❖ **Theoretiker** schlagen neue(n) Term(e) in  $\mathcal{L}$  vor
  - (Meist) motiviert von neuen Ideen / Erklärungen
- ❖ **Experimentalphysiker** simulieren Effekt in Detektor+ Daten
  - suchen danach, bzw schließen diesen Term aus
- ❖ **Beispiel Diplomarbeit in Dresden 2013**  
**Constanze Hasterok**, Optimization of the Search for Contributions of Anomalous Quartic Gauge Couplings to Vector Boson Scattering at the Large Hadron Collider  
<https://cds.cern.ch/record/1647794/files/CERN-THESIS-2013-273.pdf>
  - Neuer „aQGC“ Beitrag zum WWWW-vertex



$$\mathcal{L}_1 = \alpha_1 g g' \text{tr}[\Sigma \mathbf{B}_{\mu\nu} \Sigma^\dagger \mathbf{W}^{\mu\nu}], \quad (2.41)$$

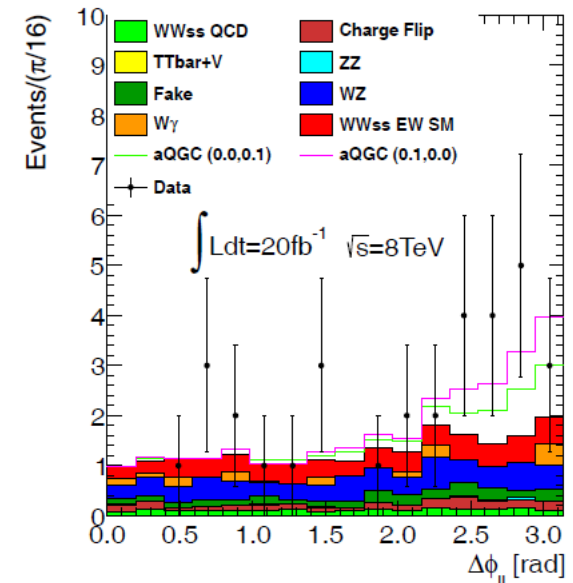
$$\mathcal{L}_2 = i\alpha_2 g' \text{tr}[\Sigma \mathbf{B}_{\mu\nu} \Sigma^\dagger [V^\mu, V^\nu]], \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}_3 = i\alpha_3 g \text{tr}[\mathbf{W}_{\mu\nu} [V^\mu, V^\nu]], \quad (2.43)$$

$$\mathcal{L}_4 = \alpha_4 (\text{tr}[V_\mu V_\nu])^2, \quad \text{and} \quad (2.44)$$

$$\mathcal{L}_5 = \alpha_5 (\text{tr}[V_\mu V^\mu])^2. \quad (2.45)$$

In this work, anomalous coupling parameters shall be constrained in the measurement of the scattering of two  $W$  bosons with equal electric charge.  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  modify only triple gauge couplings. Hence, they are not relevant for our process of interest.  $\mathcal{L}_3$  modifies triple and quartic gauge couplings and  $\mathcal{L}_4$  and  $\mathcal{L}_5$  modify only quartic gauge couplings [29].





❖ 3 Typen von **Ladungen** generieren 3 Symmetrie Gruppen:

- $SU(3)_C \otimes SU(2)_I \otimes U(1)_Y$
- Diese „lokalen Eichsymmetrien“ verlangen (!) **Wechselwirkungen**, (sonst können die lokalen Symmetrien nicht erfüllt werden)

❖ Je 1 freien **Kopplungsparameter** (Stärke) für jede Wechselwirkung (genaue Werte abhängig vom jeweiligen Energieübertrag)

- $\frac{1}{\alpha_s} = 5 \quad \frac{1}{\alpha_W} = 29 \quad \frac{1}{\alpha_Y} = 108$  vor Kondensation des BEH-Feldes
- $\frac{1}{\alpha_{em}} = \frac{1}{\alpha_W} + \frac{1}{\alpha_Y} = 137$  nach Kondensation des BEH Feldes

❖ **Brout-Englert-Higgs (BEH) Mechanismus** bei  $10^{-12}$ s nach Urknall

- Kondensation eines allgegenwärtigen BEH-Feldes
- Spontane Brechung der schwachen Eichsymmetrien
- Elektroschwache Mischung von  $(B^0, W^0)$  zu  $(Z^0, \gamma)$
- Generierung der Massen von  $W^+, W^-$  und  $Z^0$
- Mischung der Fermionen und Generierung ihrer Massen

❖ **Gravitation**